

令和7年度 入学試験問題

数学（前期）

試験時間	90分
問題冊子	1～8頁

注意事項

1. 指示があるまで問題冊子は開かないこと。
2. 問題冊子および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. スマートフォン等の電子機器類は電源を必ず切り、鞆の中にしまうこと。
5. 机には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題冊子および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題冊子の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 監督者の指示により離席する場合は、問題冊子および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時刻まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返しにすること。問題冊子は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏名	
----	--

[I] 1 から 6 の目をもつ 1 つのさいころがある。 i を虚数単位とすると、複素数平面上の点 z が $z_0 = 1$ から出発して、さいころを 1 回投げるごとに、次の規則に従って動く。

[規則] 「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け、5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする。」

n を 1 以上の整数とし、さいころを n 回投げたとき、4 以下の目が k ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) 回出る確率を $P_{n,k}$ とし、この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,k}$ と表すとき、以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

問 1 確率 $P_{n,k}$ は、二項係数 ${}_nC_k$ を用いて

$$P_{n,k} = {}_nC_k \frac{\boxed{\text{ア}}^k}{\boxed{\text{イ}}^n}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,k}$ は

$$z_{n,k} = \boxed{\text{ウ}} \frac{\boxed{\text{エ}}^{k-n}}{\boxed{\text{オ}}} \left\{ \cos \left(\frac{\boxed{\text{カ}}^{k-n}}{\boxed{\text{キ}}} \pi \right) + i \sin \left(\frac{\boxed{\text{カ}}^{k-n}}{\boxed{\text{キ}}} \pi \right) \right\}$$

となる。

問 2 確率 $P_{2025,k}$ は $k = \boxed{\text{ク}}$ のとき、最大値をとる。

問 3 複素数 $z_{2025,k}$ が純虚数となる k は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

(計 算 用 紙)

[II] O を原点とする座標空間において、四面体 $OABC$ は $OA = OB = AB = 1$, $AC = 2$, $OC = BC = \sqrt{3}$ を満たす。 $0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し、線分 OA を $x : (1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また、三角形 ABC の内心を I とし、三角形 DHI の面積を S とする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくとき、以下の各問いに答えよ。

問 1 空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{\text{ア}}, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{\text{イ}}, \quad \vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{\text{ウ}}$$

問 2 空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{OH} = \boxed{\text{エ}} \vec{a} + \boxed{\text{オ}} \vec{b} + \boxed{\text{カ}} \vec{c}$$

問 3 空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{OI} = \boxed{\text{キ}} \vec{a} + \boxed{\text{ク}} \vec{b} + \boxed{\text{ケ}} \vec{c}$$

問 4 $S = \frac{\sqrt{2}}{24}$ のとき、 x の値を求めよ。導出過程も記せ。

(計 算 用 紙)

[III] O を原点とする座標空間内において、点 P は xy 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き、点 Q は zx 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき、 $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ によって定められる動点 R の集合を S とする。点 $A(1, 3, 4)$ とするとき、以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

問 1 正の定数 k に対して、平面 $x = k$ と S の共通部分は、平面 $x = k$ 内の点 $(k, \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を中心とし、半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円となる。

問 2 点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき、線分 AH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

問 3 点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1, 0, 0)$ を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す。このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると、点 B の座標は $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}})$ となる。

問 4 集合 S 上で点 X を動かすとき、 $|\overrightarrow{AX}|$ は X の座標が $(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ のとき、最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

(計 算 用 紙)

[IV] 以下の各問いに答えよ。

問 1 全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して、関数 $b(x)$, $c(x)$ を次で定める。

$$b(x) = \frac{1}{2} \{a(x) + a(-x)\}, \quad c(x) = \frac{1}{2} \{a(x) - a(-x)\}$$

このとき、 $b(x)$ は x の偶関数、 $c(x)$ は x の奇関数、となることをそれぞれ示せ。

問 2 全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0) = 2,$

(ii) $f(x+h) + \int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。

ただし、 $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき、以下の(1)～(3)の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、 $f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0) = 0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x) = e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき、 $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

問 3 問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して、次の定積分の値を求めよ。

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

[IV] 以下の各問いに答えよ。

問 1 全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して、関数 $b(x)$, $c(x)$ を次で定める。

$$b(x) = \frac{1}{2} \{a(x) + a(-x)\}, \quad c(x) = \frac{1}{2} \{a(x) - a(-x)\}$$

このとき、 $b(x)$ は x の偶関数、 $c(x)$ は x の奇関数、となることをそれぞれ示せ。

問 2 全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0) = 2,$

(ii) $f(x+h) + \int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。

ただし、 $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき、以下の(1)～(3)の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、 $f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0) = 0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x)$ を $h(x) = e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき、 $h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

問 3 問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して、次の定積分の値を求めよ。

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

