数　学

（医　学　部）

―　2月3日　―

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

メモ

次の空欄を埋めなさい.

解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい.

1

(1) 3 直線 $x-y=0$, $x+y-2=0$, $3x-y-6=0$ の各交点を頂点とする三角形に内接する円の中心の座標は ($\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$) である.

(2) ${}_{20}C_7$ と $\dfrac{20!}{2^{10}\cdot 3^6\cdot 5^4\cdot 7^2}$ の最大公約数を素因数分解すると $\boxed{ウ}$ である.

(3) 複素数平面上の点 $z=\cos\dfrac{13}{12}\pi+i\sin\dfrac{13}{12}\pi$ を点 $z_0=\boxed{エ}+\boxed{オ}i$ を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点は, $w=\cos\dfrac{17}{12}\pi+i\sin\dfrac{17}{12}\pi$ である. ただし, $\boxed{エ}$ と $\boxed{オ}$ は実数とする.

(4) $f(x)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)+\tan(x-h)-2\tan x}{h^2}$ とするとき, $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\boxed{カ}$ である.

(5) $\triangle$ABC の内部にある点 P は, $2\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3\overrightarrow{\mathrm{BP}}+4\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ を満たすという. 2 点 A, P を結ぶ直線 AP と直線 BC との交点を D とするとき, $\dfrac{\mathrm{BD}}{\mathrm{CD}}=\boxed{キ}$ であり, $\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\boxed{ク}$ である.

(6) $\displaystyle\int_{\sqrt{\sqrt{e}-1}}^{\sqrt{e^2-1}}\frac{x\log(\log(x^2+1))}{x^2+1}dx=\boxed{ケ}$

2

(1) (i) $x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき, 関数 $y=\dfrac{1}{1-x}$ は $x=\boxed{ア}$ で最大値 $\boxed{イ}$ をとる.

(ii) $x>\dfrac{1}{3}$ のとき, 関数 $y=\dfrac{5x-1}{x^2}$ は $x=\boxed{ウ}$ で最大値 $\boxed{エ}$ をとる.

(2) u は実数, t は $0<t<1$ を満たすとする. 空間の 3 点 P(1, 0, 0), Q(u, 1, 0), R(0, 0, 1) と平面 $H: x=t$ を考える. 四面体 OPQR を H で切ったとき, 切り口の面積を S, 点 P を含む立体の体積を V, 原点 O を含む立体の体積を W とする.

(i) $u\leqq\dfrac{1}{3}$ かつ $t=\dfrac{1}{3}$ とする. S は $u=\boxed{オ}$ のとき最大値 $\boxed{カ}$ をとる. また, $3V=2W$ を満たす u の値は $u=\boxed{キ}$ である.

(ii) $u>\dfrac{1}{3}$ かつ $0<t\leqq\dfrac{1}{3}$ とする. H と線分 QR の交点の座標を u, t を用いて表すと, ($\boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$) である.

(iii) $u>\dfrac{1}{3}$ かつ $t=\dfrac{1}{3}$ とする. S は $u=\boxed{サ}$ のとき最大値 $\boxed{シ}$ をとる. また, $V=W$ を満たす u の値は $u=\boxed{ス}$ である.

3 関数 $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $\cdots$ $(x \geqq 0)$ を以下で定める.

$$f_1(x) = \frac{x+3}{x+2}, \qquad f_{n+1}(x) = f_n\left(\frac{1}{x+2}\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このとき, 次の式を満たすように定められた数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を考える.

$$f_n(x) = \frac{a_{n-1}x + a_n}{b_{n-1}x + b_n} \qquad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

ただし, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$ とする.

(1) $a_2 = \boxed{\text{ア}}$, $b_2 = \boxed{\text{イ}}$, $a_3 = \boxed{\text{ウ}}$, $b_3 = \boxed{\text{エ}}$

(2) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ はそれぞれ次の漸化式を満たす.

(a) $a_{n+2} = \boxed{\text{オ}}\, a_{n+1} + \boxed{\text{カ}}\, a_n$

$(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(b) $b_{n+2} = \boxed{\text{キ}}\, b_{n+1} + \boxed{\text{ク}}\, b_n$

(3) (2) の (a) は次のように変形できる.

$$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \end{cases} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

このときの α, β の値はそれぞれ, $\alpha = \boxed{\text{ケ}}$, $\beta = \boxed{\text{コ}}$ である. ただし, $\alpha > \beta$ とする.
$c_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおくとき, 数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = \boxed{\text{サ}}\, \beta^{n-1}$ である.
したがって, $\{a_n\}$ の一般項 a_n は

$$a_n = \boxed{\text{シ}}\, \alpha^{n-1} + \boxed{\text{ス}}\, \beta^{n-1}$$

である. また, $\{b_n\}$ の一般項 b_n は

$$b_n = \boxed{\text{セ}}\, \alpha^{n-1} + \boxed{\text{ソ}}\, \beta^{n-1}$$

である. ただし, $\boxed{\text{サ}}$ ~ $\boxed{\text{ソ}}$ は α, β を用いないで答えよ.

(4) $\displaystyle\lim_{n \to \infty} f_n(0) = \boxed{\text{タ}}$

メモ

メモ

メモ