数　　学

（医　学　部）

― 2月2日 ―

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

メモ

次の空欄を埋めなさい.

解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい.

1

(1) 自然数 a, b について等式 $(a+b\sqrt{3})^3=530+306\sqrt{3}$ が成り立つとき, $a=$ [ア], $b=$ [イ] である.

(2) $\dfrac{611}{893}$ を既約分数で表すと [ウ] である.

(3) △OAB において, 辺 OB を 7 : 3 に外分する点を C とする. s を正の実数とし, 線分 AC を 2 : s に内分する点を P とするとき, 線分 OP と辺 AB の交点 Q は OP を $s:1$ に内分している. このときの s の値は $s=$ [エ] である.

(4) r は正の定数とする. 実数 x, y に関する条件 p, q を次で定める.

$$p: -5 \leqq x+y \leqq 5 \text{ かつ } -5 \leqq x-y \leqq 5$$
$$q: x^2+y^2-2x-4y+5 \leqq r^2$$

(i) 「p は q であるための必要条件である」ような正の定数 r の範囲は [オ] である.

(ii) 「p は q であるための十分条件である」ような正の定数 r の範囲は [カ] である.

(5) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に対して数列 $\{c_n\}$ を次のように定義する.

$$c_n=\sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{n-k} \qquad (n=2, 3, \cdots)$$

$a_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}$, $b_n=\dfrac{1}{3^{n-1}}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$ であるとき, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} c_n=$ [キ] である.

2 本問において複素数を解答欄に書くときは, 極形式を用いないで答えよ.

等式 $z+\dfrac{1}{z}=\sqrt{3}$ を満たす複素数のうち, 虚部が正であるものを α とするとき, $\alpha=$ [ア] である.

(1) p, q を実数とする. 方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす p と q の組の中で, q の値が最大となる組は $p=$ [イ], $q=$ [ウ] である. また, 方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+iq|=1$ を満たす p と q の組の中で, q の値が最大となる組は $p=$ [エ], $q=$ [オ] である.

(2) 次の 2 つの条件を満たす複素数 p と q の組を考える.

(a) $|q|=1$ かつ αq は実数である.

(b) $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$.

このような p と q の組の中で p の実部が負, 虚部が正であるものは $p=$ [カ], $q=$ [キ] である.

(3) p を複素数, q を絶対値が 1, 偏角が $\dfrac{\pi}{3}$ の複素数とする. 方程式 $|p+\alpha q|=1$ を満たす点 p は, 点 [ク] を中心とする半径 [ケ] の円を描く. また, 方程式 $|p+\alpha q|=1$ かつ $|p+\overline{\alpha}q|=1$ かつ $|p|=\sqrt{3}$ を満たす複素数 p は $p=$ [コ] である.

3 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において定義された2つの関数 $f(x)$，$g(x)$ に対して

$$I_n(f(x), g(x)) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(g\left(\frac{k}{n}\right) - g\left(\frac{k-1}{n}\right)\right) \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とおく．

(1) $f(x) = x^2$,　$g(x) = x^3$ のとき，

$$I_n(x^2, x^3) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\left(\left(\frac{k}{n}\right)^3 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^3\right)$$
$$= \frac{1}{n^5}\sum_{k=1}^{n}\left(\boxed{\text{ア}}\,k^4 + \boxed{\text{イ}}\,k^3 + \boxed{\text{ウ}}\,k^2\right)$$

と表されるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(x^2, x^3) = \boxed{\text{エ}}$ である．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(\sin \pi x, x^2) = \boxed{\text{オ}}$

(3) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において，次の3つの関数 $h_1(x)$，$h_2(x)$，$h_3(x)$ を考える．

$$h_1(x) = x - x^2, \qquad h_2(x) = 1 - e^{-x}, \qquad h_3(x) = x$$

(i) $h_1(x) - h_2(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{カ}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{キ}}$ である．

(ii) $h_2(x) - h_3(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値は $\boxed{\text{ク}}$ であり，最小値は $\boxed{\text{ケ}}$ である．

(iii) $I_n(x^2, e^x)$ を $h_2(x)$ を用いて表すと，

$$I_n(x^2, e^x) = \sum_{k=1}^{n} \boxed{\text{コ}}\, h_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

である．

(i), (ii), (iii) を利用すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n(x^2, e^x) = \boxed{\text{サ}}$ である．したがって，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{I_n(x^2, e^x) + I_n(e^x, x^2)\right\} = \boxed{\text{シ}}$$

メモ

メモ

メモ