数　　　学

（医　学　部）

― 2024年2月3日 ―

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

メモ

次の空欄を埋めなさい.

解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい.

1 (1) 自然数 m, n が $m^2 - n^2 = 35$ を満たすとき, mn の取り得る値は $\boxed{\text{ア}}$ と $\boxed{\text{イ}}$ である. ただし, $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$ とする.

(2) $\left(x + \dfrac{1}{x^2}\right)^9$ の展開式の定数項は $\boxed{\text{ウ}}$ である.

(3) A, B を実数とする. 関数 $f(x) = Ax^2 + 24x$ と $g(x) = 24x^2 + Bx$ が等式

$$f(x) = 24x + x^2\int_0^1 g(t)\,dt, \qquad g(x) = 24x^2 + x\int_0^1 f(t)\,dt$$

を満たすとき, $A = \boxed{\text{エ}}$, $B = \boxed{\text{オ}}$ である.

(4) $2^{\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{2}} \times 6^{-\frac{1}{6}} \times (1.5)^{-\frac{1}{3}} = \boxed{\text{カ}}$ である.

(5) 2直線 $l : 4x + 3y - 3 = 0$, $m : 3x + 4y - 8 = 0$ の交点を P とし, l と y 軸の交点を Q とし, m と y 軸の交点を R とする. このとき, ∠QPR を 2 等分する直線の方程式は $7x + \boxed{\text{キ}}\,y - \boxed{\text{ク}} = 0$ である.

(6) $\sin\alpha - \sin\beta = \dfrac{1}{3}$, $\cos\alpha + \cos\beta = \dfrac{1}{5}$ のとき, $\cos(\alpha + \beta) = \boxed{\text{ケ}}$ である.

(7) 一般項が $a_k = (-1)^{k+1}k^2$ である数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする. S_{2n} と S_{2n-1} を n の式で表すと, $S_{2n} = \boxed{\text{コ}}$ であり, $S_{2n-1} = \boxed{\text{サ}}$ である.

2 玉が2個ずつ入った2つの袋A，Bについて，Bから玉を1個取り出してAに入れ，次にAから玉を1個取り出してBに入れるという操作を考える．Aに白玉が2個，Bに黒玉が2個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に，Bに入っている黒玉が2個である確率を P_n，1個である確率を Q_n，0個である確率を R_n と表す．以下の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ス}}$ には実数が入る．

(1) $P_1 = \boxed{\text{ア}}$，$Q_1 = \boxed{\text{イ}}$，$R_1 = \boxed{\text{ウ}}$ である．

(2) $P_2 = \boxed{\text{エ}}$，$Q_2 = \boxed{\text{オ}}$，$R_2 = \boxed{\text{カ}}$ である．

(3) n 回目の操作の後でBに入っている黒玉の個数が2個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後もBに入っている黒玉の個数が2個である確率を P_n を用いて表すと $\boxed{\text{キ}}\,P_n$ である．

(4) n 回目の操作の後でBに入っている黒玉の個数が1個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後にBに入っている黒玉の個数が2個である確率を Q_n を用いて表すと $\boxed{\text{ク}}\,Q_n$ である．

(5) n 回目の操作の後でBに入っている黒玉の個数が0個であり，$(n+1)$ 回目の操作の後にBに入っている黒玉の個数が2個である確率は $\boxed{\text{ケ}}$ である．したがって，$P_{n+1} = \boxed{\text{キ}}\,P_n + \boxed{\text{ク}}\,Q_n$ である．

(6) $Q_{n+1} = \boxed{\text{コ}}$ である．

(7) $P_n = \boxed{\text{サ}} + \boxed{\text{シ}} \cdot \left(\boxed{\text{ス}}\right)^n$ である．

3 S_1を半径1の球とする．自然数nに対し，球S_nに内接する立方体をP_nとし，P_nに内接する球をS_{n+1}とする．

(1) P_1の一辺の長さは $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) S_2の半径は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) P_2の一辺の長さは $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(4) P_nの体積は $\boxed{\text{エ}} \times 3^{\boxed{\text{オ}}\,n}$ である．

(5) S_nの体積は $\boxed{\text{カ}} \times 3^{\boxed{\text{キ}}\,n}$ である．

(6) S_nの体積がS_1の体積の $\dfrac{1}{216}$ 倍以下となる最小のnの値は $\boxed{\text{ク}}$ である．

メモ