

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中には持ち出してはいけない。

2. n を自然数, a を正の定数とする。関数 $f(x)$ は等式

$$f(x) = x + \frac{1}{n} \int_0^x f(t) dt$$

をみたし, 関数 $g(x)$ は

$$g(x) = ae^{-\frac{x}{n}} + a$$

とする。2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ はある1点を共有し, その点における2つの曲線の接線が直交するとき, 次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底とする。

- (1) $h(x) = e^{-\frac{x}{n}} f(x)$ とおくとき, 導関数 $h'(x)$ と $h(x)$ を求めよ。
- (2) a を n を用いて表せ。
- (3) 2つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ と y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とするとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_n}{n^3}$ を求めよ。

3. O を原点とする座標平面において、第 1 象限に属する点 $P(\sqrt{2}r, \sqrt{3}s)$ (r, s は有理数) をとるとき、線分 OP の長さは無理数となることを示せ。

4. O を原点とする座標空間に 2 点 $A(0, 0, 1)$, $B(0, 0, -1)$ がある。 $r > 0$, $-\pi \leq \theta < \pi$ に対して, 2 点 $P(r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$, $Q(\frac{1}{r} \cos \theta, \frac{1}{r} \sin \theta, 0)$ をとり, 2 直線 AP と BQ の交点を $R(a, b, c)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) a, b, c の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 点 $G(4, 1, 1)$ をとる。 r, θ が $r \cos \theta = \frac{1}{2}$ をみたしながら変化するとき, 内積 $\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OR}$ の最大値と, そのときの a, b, c の値を求めよ。

