

理 科

(監督者の指示があるまで開いてはいけない)

1. 出願時に選択した2科目について、解答を別紙の解答用紙に記入しなさい。
2. 選択していない科目の解答用紙は問題配布後に回収します。
3. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
4. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
5. 下書きや計算は問題冊子の余白を利用しなさい。
6. 記入中でない解答用紙は必ず裏返しにしておきなさい。
7. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

問 題 目 次

物 理	1 ~ 8	ページ
化 学	10 ~ 18	ページ
生 物	19 ~ 30	ページ

物 理

1. 骨は、リン酸カルシウムやコラーゲンなどを主成分とする硬い組織で、脊椎動物の骨格を構成し、体重を支えたり、衝撃に弱い器官を覆い保護している。骨は、一般的には変形しないように思われるが、わずかではあるが、押せば縮み、引っ張れば伸びる。

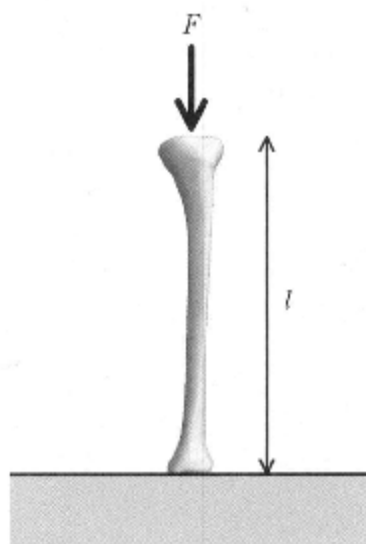


図1. 骨の圧縮

図1に示す脚の骨を断面積 S 、長さ l のまっすぐで一様な棒だと考えよう。伸縮の際、横方向に細くなったり、膨らんだりするが、その効果は無視し、断面積は一定とする。図1のように、この棒の軸が鉛直になるように下端を固定し、上端から鉛直に力 F を加えると、骨はばねのようにフックの法則

$$F = k\Delta l$$

にしたがって伸縮する。ただし、 Δl は長さの変化量であり、 k は骨のばね定数である。単位断面積あたりにかかる力(応力) T は骨の断面積を S として

$$T = \frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

と書ける。ここで、 E はヤング率と呼ばれる物質固有の量である。実際に、骨を引っ張ったり、圧縮する場合の伸縮率 $\frac{\Delta l}{l}$ と応力の関係は図2のようである。引っ張りの場合も圧縮の場合も×印のところで骨は破壊される。すなわち、骨折する。特に圧縮の場合は、破壊するまで伸縮率 $\frac{\Delta l}{l}$ と応力はおおよそ比例関係にあることが分かる。

さて、圧縮の場合について、骨は折れる(圧迫骨折)までフックの法則にしたがうものとして、骨がどれだけの変形に耐えられるか、つまり、どれだけの弾性エネルギーを蓄えられるのかを計算してみよう。ただし、骨折する瞬間の応力を T_0 とする。

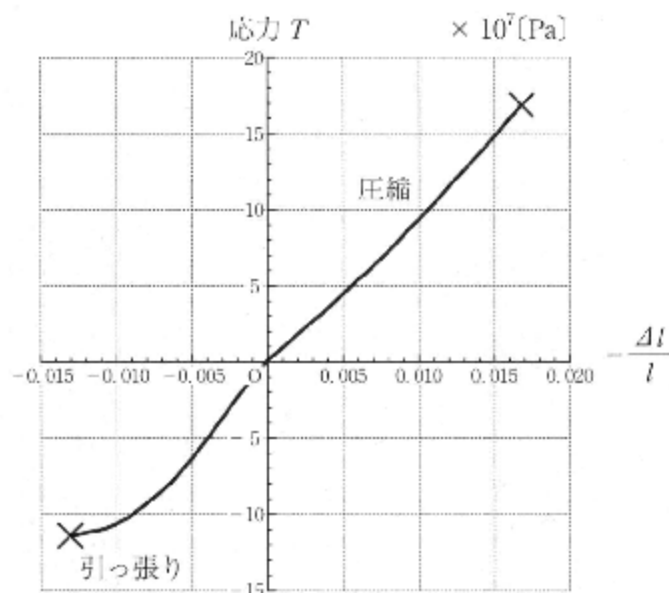


図2. 骨の応力－伸縮率曲線

H. Yamada : Strength of Biological Materials (F. G. Evans ed., Williams & Wilkins, Baltimore, 1970) のデータを用いて描画

骨の変形は十分小さく、単位体積あたりの物理量を考える場合は変形前の体積を用いて考えるものとして、以下の問いに答えなさい。

問 1. ヤング率 E を骨のばね定数 k を用いて表しなさい。

問 2. 骨折する瞬間に単位体積あたりに骨に蓄えられている弾性エネルギーを、骨折する瞬間の応力 T_c 、ヤング率 E を用いて表しなさい。

問 3. 長さ 0.90 m、平均断面積 6.0 cm^2 の脚の骨を考える。骨のヤング率を $E = 1.4 \times 10^{10} \text{ Pa}$ 、骨折する瞬間の応力(圧力)を $T_c = 1.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ として、圧迫骨折直前にこの骨に蓄えられる弾性エネルギーを求めよ。

問 4. 問 3 の骨、両脚分(2本)で吸収できる最大のエネルギーが体重 70 kg の人の重力による位置エネルギーに等しくなる高さを求めなさい。ただし、重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

問 5. 問 4 で求めた高さを体重 70 kg の人が飛び降りても、通常、骨折することはない。その理由を考察しなさい。

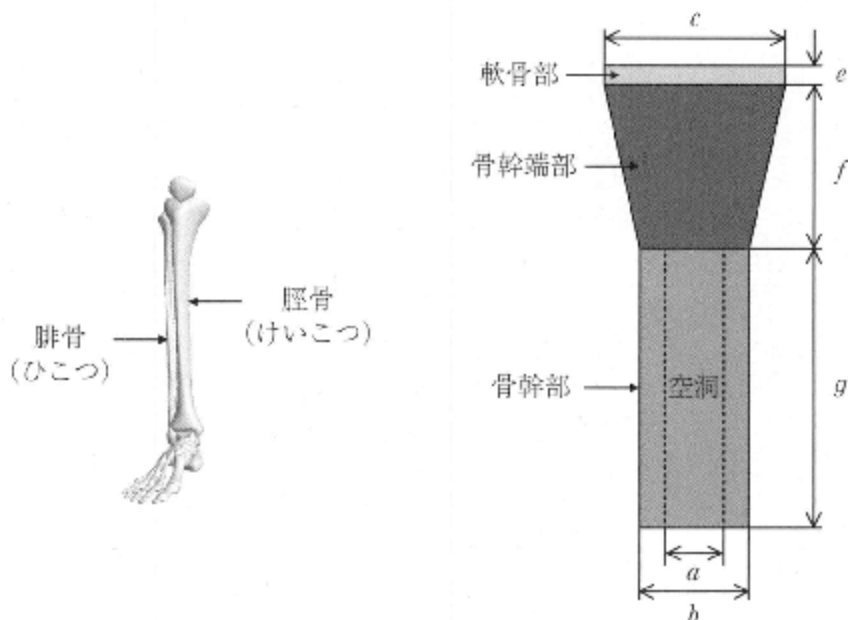


図 3. ヒトの脛骨の上半分の模式図

I. P. Herman 著, 齋藤太朗・高木建次共訳, 人体物理学(NTS), P.264-265, 引用改変

問 6. 図 3 右図はヒトの脛骨(けいこつ, すねの太い方の骨(図 3 左図))の上半分の模式図である。

図 3 右図の骨を, 中空の円筒状の骨幹部, 太さが変化する骨幹端部および円盤状の軟骨部の 3 つの部分に分ける。それぞれのサイズは, $a = 10 \text{ mm}$, $b = 30 \text{ mm}$, $c = 50 \text{ mm}$, $e = 4.0 \text{ mm}$, $f = 70 \text{ mm}$ および $g = 130 \text{ mm}$ である。それぞれの材質は弾性的であり, ヤング率は骨幹部 $1.7 \times 10^{10} \text{ Pa}$, 骨幹端部 $2.0 \times 10^8 \text{ Pa}$ および軟骨部 $1.7 \times 10^7 \text{ Pa}$ である。

図 3 右図の骨の軸が鉛直になるように下端を固定し, 軟骨部に鉛直で一様な圧縮力 F が加えられる場合, 骨幹部に蓄えられる単位体積あたりの弾性エネルギーに対する軟骨部のその比を求めなさい。また, 骨幹部に蓄えられる弾性エネルギーに対する軟骨部のその比を求めなさい。

“問題は次ページに続きます。”

2. 多くの機械にモーターが組み込まれているように、生物にも体を自在に動かし、また生命活動を維持するために、分子レベルのモーターが備わっている。これらを生体分子モーターとよぶ。生体分子モーターはタンパク質からなり、10 nm 程度の大きさで、常に水の抵抗にさらされて運動している。

分子モーターには、筋肉などの動きに用いられる直線的に動くリニアモーターと、鞭毛などを動かしている回転モーターがある。ここでは、回転モーターとしてもよく研究されている、呼吸により ATP(アデノシン三リン酸)を産生する細胞小器官であるミトコンドリアに見られる ATP 合成酵素について考える。

ATP 合成酵素の模式図を図 1 に示す。ATP 合成酵素は同じ回転軸に結合した 2 つの異なる回転モーター F_0 と F_1 から成っている。 F_0 モーターはミトコンドリア内膜(以下、膜と呼ぶ)内外の水素イオンの濃度差を利用して回転を起こす。具体的には、水素イオンが 1 個、膜を通過する毎に F_0 ユニットが図 1 のように(順方向に) 30° ずつ回転する。

他方、 F_1 モーターは、ATP の加水分解を用いて、 F_0 モーターとは反対の向きに回転する。このとき、ATP 分子が 1 つ加水分解される毎に 120° ずつ回転する。通常の状態では、膜内外の電気化学的エネルギー差が大きく、 F_0 モーターは F_1 モーターより大きな力のモーメントを発生するため、 F_0 モーターが F_1 モーターを逆方向に回転させ、ATP の加水分解の逆の過程により、ADP(アデノシン二リン酸)と無機リン酸(H_3PO_4)から ATP が合成される。

膜内外の電気化学的エネルギー差が小さな場合、 F_1 モーターが F_0 モーターより大きな力のモーメントを発生し、 F_0 モーターが逆回転し、ATP の加水分解を用いて水素イオンをミトコンドリア膜間腔に放出する。

モーターの回転の向きにより、ATP の化学合成とその加水分解どちらも可能であることから分かるように、このモーターのエネルギー効率はほぼ 100 % と言われている。

F_0 モーターが順方向に 1 分間に 6000 回転(6000 rpm)しているとして、以下の問いに答えなさい。

- 問 1. 1 秒間に F_0 モーターを通してミトコンドリア基質内に流入する水素イオンの個数を求めなさい。
- 問 2. F_0 モーターを流れる電流を求めなさい。ただし、電気素量を $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ とする。
- 問 3. F_0 モーターにかかっている電圧(膜の外側と内側の電位差)が 140 mV であるとき、 F_0 モーターの電気抵抗を求めなさい。
- 問 4. 問 3 のとき、この F_0 モーターの仕事率を求めなさい。

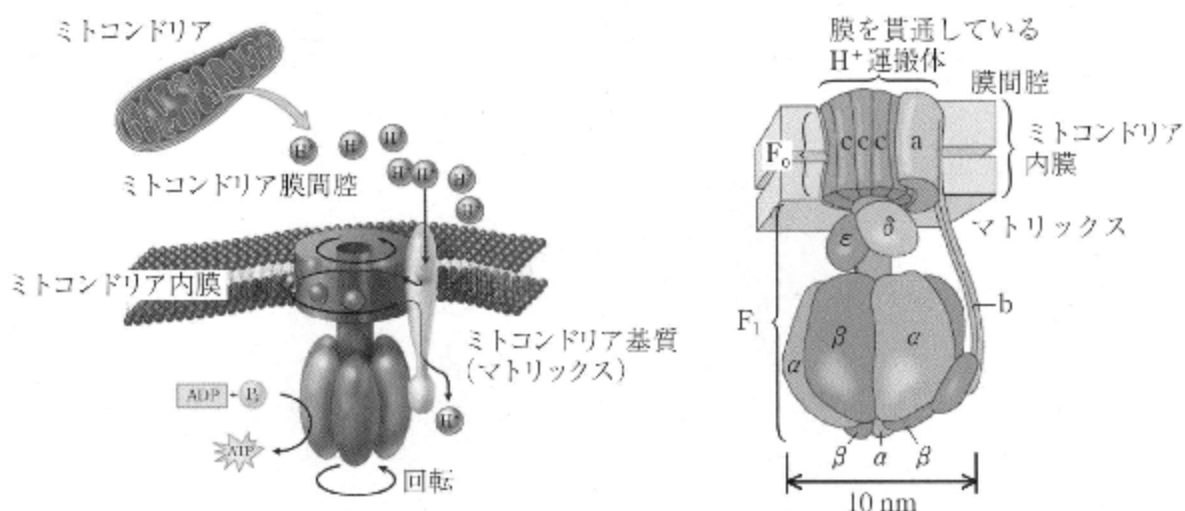


図1. ATP合成酵素の模式図

(左図) <https://s3-sa-east-1.amazonaws.com/descomplica-blog/wpcontent/uploads/2016/05/05083209/resumo-de-respiracao-celular7.jpg> 改変

(右図) Rob Phillips, Jane Kondev, Julie Theriot: 細胞の物理生物学, 共立出版, 2011年, p.717 改変

- 問 5. 水素イオンが膜の外側から内側に移動する場合、静電的なエネルギー変化だけではなく、膜の外から水素イオン1つを取り除き、膜の内側に水素イオン1つを付け加えることにもなう化学的なエネルギー変化がある。そのエネルギー変化 ΔE は膜の内外の水素イオン濃度指数 pH の差を ΔpH として

$$\Delta E = 2.30 k_B T (\Delta \text{pH})$$

と与えられる。ここで、 k_B はボルツマン定数で $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ 、 T は絶対温度である。

ΔpH を 0.75、温度を 27°C として、この濃度差の効果がもたらす化学的なエネルギー変化による仕事率を求めなさい。

次に、 F_1 モーターが ATP の加水分解により 1 分間に 6000 回転 (6000 rpm) しているとして、以下の問いに答えなさい。

- 問 6. 1 秒間に分解される ATP の分子数を求めなさい。

- 問 7. 生物は以下のように ATP を ADP (アデノシン二リン酸) に加水分解することによりエネルギーを得ている。



F_1 モーターにおいて、ATP の加水分解エネルギーが全て回転エネルギーに変換されるものとして、 F_1 モーターの仕事率を求めなさい。ただし、アボガドロ定数は $6.02 \times 10^{23} / \text{mol}$ である。

問 8. F_0 モーターの仕事率は問 4, 問 5 の仕事率の和となることを考慮して, F_0 モーターが発生する力のモーメント N_0 を求めなさい。また, 問 7 を考慮して, F_1 モーターが発生する力のモーメント N_1 を求めなさい。解答欄に単位も記すこと。ただし, モーターには常に一定の力のモーメントが発生しているものとする。

なお, 回転運動の「仕事」は, 「回転軸まわりの力のモーメント」と「回転角[rad]」の積で与えられる。

問 9. 2009 年に発売されたある自動車のガソリンエンジンが発生する回転軸まわりの力のモーメントは, カタログによると回転数に対して図 2 のように変化する。 F_0 モーター, F_1 モーターが発生する力のモーメントは回転数に対してどのように変化するのか, それぞれ説明しなさい。

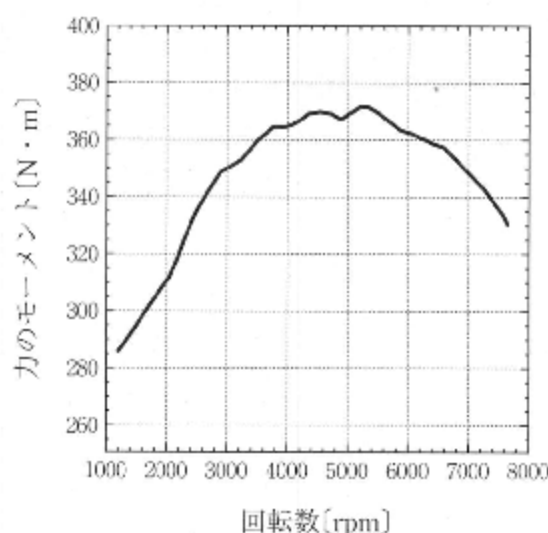


図 2. あるガソリンエンジンが発生する力のモーメントの回転数依存性

http://www2.nissan.co.jp/Z/PDF/z_specification.pdf のデータを用いて描画

問 10. 膜内外の電位差がない状態に設定し, F_0 モーターが問 5 の膜内外の pH の差, ΔpH のみにより駆動するようにしたとき, F_0 モーターと F_1 モーターそれぞれが発生する互いに逆向きの力のモーメントが拮抗し, つり合うための ΔpH の値を求めなさい。温度は 27°C に保つものとする。ただし, 気体定数は $8.31 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$ である。

3. 図1のように、水平に置かれた円筒A(断面積 15 cm^2)と鉛直に置かれた円筒B(断面積 10 cm^2)が細管Cで連結された容器を考える。また、円筒Bは上部が開いており、なめらかに上下に移動できる質量 2.0 kg のピストンQで気体を密封している。密閉された容器(円筒A、Bおよび細管C)内には、温度 22°C の理想気体が入っており、大気圧は $1.0 \times 10^5\text{ Pa}$ である。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 、気体定数を $8.3\text{ J/(K}\cdot\text{mol)}$ として、以下の問いに答えなさい。ただし、容器内の気体の温度および密度は場所によらず一様で、容器およびピストンQを通じた外部との熱のやりとりはなく、それぞれの熱容量は無視できるものとする。

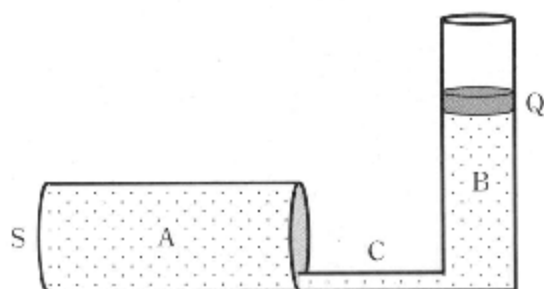


図1.

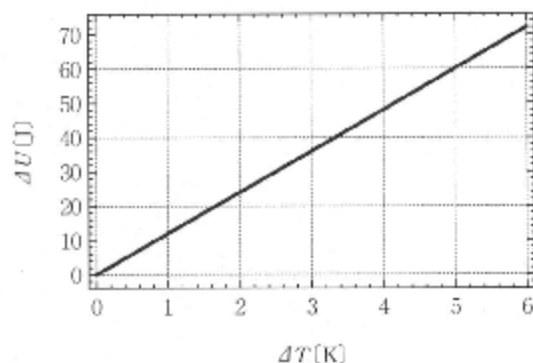


図2. 温度変化 ΔT と内部エネルギーの変化 ΔU の関係

問 1. 円筒Aの左端S面に内部の気体がおよぼす力[N]を求めなさい。

問 2. 容器内に閉じ込められた気体のモル密度[mol/m³]を求めなさい。

内部の気体を熱して 252 J の熱量をゆっくり供給したところ、気体の温度が上昇し、ピストンQは 10 cm 上昇した。

問 3. 内部の気体がした仕事[J]を求めなさい。

問 4. 容器に閉じ込められた気体の内部エネルギーの変化 $\Delta U\text{ [J]}$ と温度変化 $\Delta T\text{ [K]}$ は図2に示される関係にある。この気体が定積変化する場合の熱容量を求めなさい。解答欄に単位も記すこと。

問 5. 気体の温度[$^\circ\text{C}$]を求めなさい。

問 6. さらに、ピストンQを固定したまま、1秒毎に 2.1 J の割合で内部の気体の熱量を奪った。
2.0分後の気体の温度[$^\circ\text{C}$]を求めなさい。

