

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋 A には白玉 2 個、赤玉 1 個、袋 B には白玉 1 個、赤玉 2 個が入っている。この状態から始めて、次の操作を繰り返し行う。

操作

- ① 袋 A、袋 B から玉を 1 個ずつ取り出す。
- ② (i) 取り出した 2 個の玉の色が同じである場合は、取り出した玉を 2 個とも袋 A に入れる。
(ii) 取り出した 2 個の玉の色が異なる場合は、袋 A から取り出した玉は袋 B に入れ、袋 B から取り出した玉は袋 A に入れる。

このとき、

- 操作を 2 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 1 個である確率は

(ア)

- 操作を 3 回繰り返した後に袋 A に入っている赤玉の個数が 0 個である確率は

(イ)

である。

2. 実数 a は正の定数とする。実数全体で定義された関数 $f(x) = \frac{|x+a|}{\sqrt{x^2+1}}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ が $x = -a$ で微分可能であるかどうか調べよ。
- (2) $f(x)$ の最大値が $\sqrt{2}$ となるように、定数 a の値を定めよ。
- (3) 定数 a は (2) で定めた値とする。 $y = f(x)$ のグラフと x 軸および y 軸で囲まれた部分を、 x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

3. m は 3 以上の奇数とし、 m のすべての正の約数を $a_1, a_2, \dots, a_k$ と並べる。ただし、 $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ とする。

以下の 2 つの条件 (i), (ii) をみたす m について考える。

(i) m は素数ではない。

(ii) $i \leq j, 1 < i < k, 1 < j < k$ をみたすすべての整数 i, j について、 $a_j \cdots a_i \leq 3$ が成り立つ。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) k は 3 または 4 であることを示し、 m を a_2 を用いて表せ。

(2) $k = 3$ となるとき、すべての正の整数 n について $(a_2n + 1)^{a_2} - 1$ は m の倍数であることを示せ。

4. 複素数平面上の点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき、 $w = z + \frac{2}{\bar{z}}$ で表される点 w の描く図形を C とする。 C で囲まれた部分の内部（ただし、境界線は含まない）に定点 α をとり、 α を通る直線 ℓ が C と交わる 2 点を β_1, β_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位を表す。

- (1) $w = u + vi$ (u, v は実数) とするとき、 u と v の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 点 α を固定したまま ℓ を動かすとき、積 $|\beta_1 - \alpha| \cdot |\beta_2 - \alpha|$ が最大となるような ℓ はどのような直線のかを調べよ。