

数 学

〈監督者の指示があるまで開いてはいけない〉

1. 試験開始後、まず解答用紙に自分の受験番号と氏名を正しく記入しなさい。
2. 試験開始後、速やかに問題冊子に落丁や乱丁がないか確認しなさい。
落丁や乱丁があった場合は、手を挙げなさい。
3. 解答用紙に印刷されていない問いの番号は各自で記入しなさい。
4. 下書きは問題冊子の余白を利用しなさい。
5. 問題冊子は試験終了後、持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

袋 A には赤玉 3 個, 白玉 1 個, 袋 B には赤玉 1 個, 白玉 3 個が入っている。「袋 A から 2 個の玉を取り出して袋 B に入れ, 次に, 袋 B から 2 個の玉を取り出して袋 A に入れる」という操作を繰り返す。1 回の操作の後, 袋 A に白玉が 2 個以上ある確率は , 2 回の操作の後, 袋 A の中が白玉だけになる確率は である。

2. p を 2 以上の自然数の定数とする。 $n = 2, 3, 4, \dots$ に対して、関数 $f_n(x)$ ($x > 0$) を

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + \frac{x}{n+1}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{pn}\right)$$

で定める。例えば、 $p = 2$ のとき

$$\begin{aligned} f_2(x) &= \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \\ f_3(x) &= \left(1 + \frac{x}{3}\right) \left(1 + \frac{x}{4}\right) \left(1 + \frac{x}{5}\right) \left(1 + \frac{x}{6}\right) \end{aligned}$$

である。 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ ($x > 0$) とおくとき、次の問いに答えよ。

- (1) $t \geq 0$ のとき、不等式 $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$ が成り立つことを示せ。ただし、対数は自然対数とする。
- (2) $f(x)$ を求めよ。

3. 次の問いに答えよ。

- (1) a, b, n は自然数の定数で、 b は 4 の倍数ではなく、 $n \geq 2$ とする。

a が 2^n の倍数であるが、 2^{n+1} の倍数ではないとき、 $a(a+b)$ 、 $2a(2a+b)$ のいずれかは、 2^{n+1} の倍数であるが、 2^{n+2} の倍数ではないことを示せ。

- (2) b は自然数の定数で、4 の倍数ではないとする。

3 以上の任意の自然数 n に対して、次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。

$\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は、小数第 n 位の数字が 5 である小数第 n 位までの有限小数で表される。

4. O を原点とする xyz 空間内に, xy 平面上の放物線 $y = x^2$ を y 軸のまわりに回転してできる曲面 S と, 正四面体 $OABC$ があり, 条件「3 頂点 A, B, C は S 上にある」をみたしている。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 正四面体 $OABC$ の 1 辺の長さを求めよ。
- (2) 正四面体 $OABC$ が条件をみたしながら動くとき, xy 平面による正四面体 $OABC$ の切り口の面積の最小値を求めよ。

