

令和2年度入学試験問題（一般入試）

数 学

10：20～12：00

注 意

1. 問題冊子は4ページ、解答紙は2枚である。問題冊子は、指示があるまで開かないこと。
2. 解答開始前に、試験監督者の指示にしたがって、すべての解答紙それぞれ2ヶ所に受験番号を記入すること。
3. 「始め」の合図があったら、問題冊子のページ数を確認すること。
4. 解答は、黒色鉛筆(シャープペンシルも可)を使用し、すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。
5. 試験終了後、監督者の指示にしたがって、解答紙の順番をそろえること。
6. 下書き等は、問題冊子の余白を利用すること。
7. 解答紙は持ち帰らないこと。

1 空欄にあてはまる適切な数、式、記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

- (1) 実数 x に対して、方程式 $\pi^x = e^x + ||x - 2| - 1|$ の解の個数は である。
- (2) 数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^5}$ の値は である。
- (3) $AB = 5$, $BC = 8$, $CA = 5$ である $\triangle ABC$ の内心を I とするとき線分 CI の長さは である。
- (4) 4 , 6 , 8 は $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$ のように 2 つの正の素数の和で表される。4 以上 50 以下の偶数で、このように 2 つの正の素数の和で表されるものの個数は である。
- (5) 媒介変数 t を用いて $x = \cos 3t$, $y = \sin 4t$ と表される座標平面上の曲線を C とする。 C と直線 $y = \frac{1}{3}$ が交わる座標平面上の点の個数は である。
- (6) 1 辺の長さが 1 の正四面体の体積は である。
- (7) 座標空間において、点 $A(0, 1, 1)$, $B(1, -1, 1)$, $C(1, 1, 1)$, $D(1, 2, 3)$ とする。線分 AB , AC , AD を 3 辺とする平行六面体の体積は である。
- (8) 100 円, 50 円, 10 円の硬貨がそれぞれたくさんあるとする。ある品物を買うのに 3000 円かかるとき、このお金による支払い方の総数は である。
- (9) $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 7$ である $\triangle ABC$ の外接円の半径は である。
- (10) 2 次曲線 $y^2 = 2x^2 + 2x - 1$ の離心率は である。
- (11) 関数 $y = f(x)$ は導関数を含む方程式(微分方程式) $\frac{dy}{dx} + y = 0$ および $f(1) = 1$ を満たすとする。このとき $f(0)$ の値は である。
- (12) 関数 $y = f(x)$ は導関数を含む方程式(微分方程式) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$ および $f(2) = 1$ を満たすとする。このとき $f(3)$ の値は である。

(計算用余白)

2 空欄にあてはまる適切な数、式、記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

1 の m 乗根 z_k について偏角 (≥ 0) の小さいものから順に $k = 0, 1, \dots, m - 1$ とする。複素数平面上の $w_0 = 1$ を基点 P_0 として、幾つかのルールに従って順に複素数平面上を w_1, w_2, w_3, \dots と動かしていき、それらの示す点を P_1, P_2, P_3, \dots で図形を描いていくという遊びを行う。

【ルール1】 $m = 6$ の時、 n 回サイコロを振って、サイコロの目が a ($a = 1, \dots, 6$) である時、 $w_n = az_{a-1}w_{n-1}$ となる場合を考える。その時、 n 回目の試行が終わった時点で $|w_n| = 15$ である確率は、 n を用いて表すと で表され、 n 回目の試行で点 w_{n-1} と w_n を結んだ線分 $P_{n-1}P_n$ が、はじめて虚軸と交わる確率は、 n を用いて表すと となる。また、 n 回目の試行で、点 w_{n-1} と w_n を結んだ線分 $P_{n-1}P_n$ の長さが $5\sqrt{31}$ となる確率は である。

【ルール2】 $m = 8$ の時を考えるが、今度はサイコロを使わず順に $w_n = \sqrt{2}z_1w_{n-1} - 1$ と移る事にする。この時、 $w_n =$ で表され、 P_n から P_{n+4} までの連続する5点で結んだ不等辺五角形の面積は n を用いて となる。

【ルール3】 $m = 20$ の時、コインを投げて表が出れば $a = 3$ 、裏が出れば $a = 1$ として、 $w_n = h_a z_a w_{n-1}$ ($h_1 = \sqrt{5}$, $h_3 = \frac{1}{5}$) となる試行を行う。今、 n 回目で運よく原点周りをちょうど1周して再び基点 P_0 に戻ってきたとして、この多角形を T と呼ぶことにする。実数で $\sin \frac{\pi}{10} =$ と表現できる事を用いると、整数 t ($t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) に対して原点周りに $\frac{\pi t}{2}$ だけ回転させても(重なって)同一な T のうち、最大面積となる T の面積は である。

【ルール4】 ある m ($m \geq 4$) の場合を考える。コインを投げて表が出れば $a = 2$ 、裏が出れば $a = 1$ として、 n 回目の試行で $w_n = z_a w_{n-1}$ と進めていく時、原点周りをちょうど1周して再び基点 P_0 に戻る確率は、 m を用いて表すと となる。