令和 2 (2020) 年度入学試験問題 (前期)

数　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（前　期）

〔1〕 A_0，A_1，A_2 を一辺の長さ1の正三角形の頂点とし，P_0 を辺 A_0A_1 上の点として $A_0P_0 = a_0\ (0 < a_0 < 1)$ とする。さらに，k を自然数として，

$$A_n = \begin{cases} A_0 & n = 3k \text{ のとき} \\ A_1 & n = 3k+1 \text{ のとき} \\ A_2 & n = 3k+2 \text{ のとき} \end{cases}$$

と定める。辺 $A_{n-1}A_n$ 上の点 P_{n-1} が定まったとき，P_{n-1} から辺 A_nA_{n+1} に下ろした垂線の足を P_n と決め，$A_nP_n = a_n$ とする。

(1) a_n を a_{n-1} で表せ。

(2) $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

〔2〕 $\triangle$ABC において $\angle A = \dfrac{\pi}{2}$，BC＝1，$\angle B = \theta$ とし，面積を S，辺の長さの和を l とする。また $\triangle$ABC を辺 BC の周りに1回転させてできる回転体 W の体積を V とする。

(1) V を θ を用いて表せ。

(2) $\dfrac{V}{Sl}$ が最大となるときの θ を定めよ。

〔3〕 m を4以上の自然数とする。赤玉 m 個と青玉 m 個の計 $2m$ 個の玉を袋に入れる。袋から玉を1個ずつ続けて4個取り出す。最初の2個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を A とする。4個の玉を取り出したとき赤玉と青玉が同数という事象を B とする。以下では事象 A が起こる確率を $P(A)$ などと表す。

(1) 確率 $P(A)$，$P(B)$ をそれぞれ m で表せ。

(2) 確率 $P(A \cap B)$ を m で表せ。

(3) 事象 A も B も起こらない確率を m で表せ。

〔4〕 a，b，c はいずれも正の有理数とする。

(1) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$ も $\sqrt{b}$ も有理数であることを示せ。

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ が有理数ならば，$\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$，$\sqrt{c}$ のいずれも有理数であることを示せ。

〔5〕 n を0以上の整数として，次のようにおく。

$$c_n(x) = \int_0^x t^n \cos t\, dt,\quad s_n(x) = \int_0^x t^n \sin t\, dt,\quad f_n(x) = \int_0^x t^n \cos(x-t)\, dt$$

(1) $n \geqq 1$ のとき，$c_n(x)$，$s_n(x)$ を $c_{n-1}(x)$，$s_{n-1}(x)$ を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$f_n(x)$ を $f_{n-2}(x)$ を用いて表せ。

(3) $\displaystyle\int_0^x h(t)\cos(x-t)\, dt = x^3$ を満たす多項式 $h(t)$ があれば，その一例を求めよ。