令和 2 (2020) 年度入学試験問題 (後期)

数　　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔１〕 n を２以上の自然数とする。１から n までの番号が１つずつ書かれた n 枚のカードをよく混ぜ，１枚取り出し，それを戻さずにもう１枚取り出す。

(1) １枚目に取り出したカードの番号より２枚目の番号の方が小さい確率を求めよ。

(2) １枚目に取り出したカードの番号より２枚目の番号の方が小さいという条件の下で，２枚目の番号が１である確率を求めよ。

〔２〕 ２つの曲線 $C_1 : y = x^2 - \dfrac{3}{2}$ と $C_2 : y^2 = -2x + \dfrac{9}{4}$ を考える。

(1) C_1，C_2 の共有点をすべて求めよ。

(2) ２つの領域 $y \geqq x^2 - \dfrac{3}{2}$ と $y^2 \leqq -2x + \dfrac{9}{4}$ の共通部分 W の面積 S を求めよ。

〔３〕 a，b を正の整数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \dfrac{1}{x^b} & (x \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(1) $f(x)$ は $x = 0$ で連続であることを示せ。

(2) $a \geqq 2$ のとき $f(x)$ はすべての x で微分可能であることを示し，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(3) $a \geqq b + 3$ のとき $f'(x)$ は $x = 0$ で微分可能であることを示し，$f''(0)$ の値を求めよ。

〔４〕 p，q を素数とし $p \neq q$ とする。

(1) $p^x = q^y$ を満たす有理数 x，y を求めよ。

(2) $\log_p q$ は無理数であることを示せ。

(3) a，b，c，d を０でない有理数とし，$m = p^a q^b$，$n = p^c q^d$ とする。$\log_m n$ が有理数であるための a，b，c，d の条件を求め，そのときの $\log_m n$ の値を a，b，c，d を用いて表せ。

〔５〕 ２つの合同な直円錐 U，V よりなる立体 W がある。U，V は頂点Ｏを共有し，それぞれの底面の円 A，B はただ１点Ｍを共有していて母線OMのみが U，V の共通部分である。また，A，B の中心をＡ，Ｂとすると，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$ であり，$\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{BOM} = \alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

この立体 W を水平面 π 上に横たえる。π と U，V それぞれの共通部分のＯを通る直線を l，m とする。Ａ，Ｂから l，m に下ろした垂線の足を $\mathrm{A_1}$，$\mathrm{B_1}$ とし，$\angle\mathrm{A_1OB_1} = 2\theta$ とする。

なお，以下の問いに答える際に，４点Ｏ，Ａ，Ｍ，Ｂが同一平面上にあることと，$\mathrm{AA_1}$，$\mathrm{BB_1}$ が水平面 π に垂直であることは証明しなくて良い。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を α を用いて表せ。

(2) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB_1}}$ を α，θ を用いて表せ。

(3) $\sin\theta$ を α で表せ。