

# 令和2年度 入学試験問題

## 数学問題用紙(後期)

試験時間	90分
問題用紙	1~8頁

### 注意事項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り、鞄の中にしまうこと。
5. 机上には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は、問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返し、問題用紙は持ち帰ること。

受験番号		氏名	
------	--	----	--

[ I ] O を原点とする空間内において 2 点 A, B を  $OA = \sqrt{3}$ ,  $OB = AB = \sqrt{2}$  を満たすよう  
にとる。さらに、点 P は以下の条件 (\*) を満たしながら空間内を動くものとする。

(\*) 「 $BP = \sqrt{2}$ , かつ  $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$ , かつ 4 点 O, A, B, P は同一平面上には存在しない。」

点 B から三角形 OAP を含む平面に垂線 BH を下ろす。 $0 < x < \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$  を満たす各 x に  
対して、条件 (\*) と  $OP = x$  を満たす点 P が存在することは認めて良い。以下では  $x = OP$ ,  
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$  とおく。このとき、以下の [ア] ~ [ヒ] に適する 1 以上  
の整数を解答欄に記入せよ。ただし、有理数は既約分数で表わすこと。

問 1 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{p}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{p}$  は x を用いてそれぞれ次のように表せる。

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \quad \vec{a} \cdot \vec{p} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}x, \quad \vec{b} \cdot \vec{p} = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}x^2$$

問 2 ベクトル  $\overrightarrow{OH}$  は実数 s, t を用いて

$$\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{p}$$

と表せる。このとき、s, t は x を用いてそれぞれ次のように表される。

$$s = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}x, \quad t = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} - \frac{\sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}} \left( \frac{1}{x} \right)$$

問 3  $|\overrightarrow{BH}|^2$  は x を用いて次のように表せる。

$$|\overrightarrow{BH}|^2 = \frac{1}{\boxed{\text{ソ}}} \left( -x^2 + \sqrt{\boxed{\text{タ}}}x + \boxed{\text{チ}} \right)$$

問 4 点 P が条件 (\*) と  $\frac{1}{3} \leq \vec{b} \cdot \vec{p} \leq \frac{\sqrt{7}}{4}x$  を満たしながら動くとき、 $|\overrightarrow{BH}|^2$  は  $x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$   
のとき最大値  $\boxed{\text{ト}}/\boxed{\text{ナ}}$  をとり、 $x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$  のとき最小値  $\frac{\boxed{\text{ネ}} + \boxed{\text{ノ}}\sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$  を  
とる。

( 計 算 用 紙 )

[ II ]  $n$  を 1 以上の整数とする。中が見えない  $n$  個の袋があり、それぞれの袋の中には 1 から 5 までの整数がそれぞれ 1 つずつ書かれたカードが 5 枚入っている。これら  $n$  個の各袋からカードを 1 枚ずつ取り出すとき、取り出された  $n$  枚のカードに書かれている数字の和が 3 の倍数である確率を  $p_n$  とする。

問 1  $p_{n+1}$  を  $p_n$  を用いて表せ。

問 2  $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$  に対して、不等式

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{2m} \leq |p_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{10}\right)^m$$

を満たす  $n$  の値がちょうど 20 個存在するように 1 以上の整数  $m$  の値を定めることは可能か。可能ならばその値を求め、不可能ならばその理由を説明せよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$  であるとする。

( 計 算 用 紙 )

[III] O を原点とする xyz 空間において、各  $\theta$   $\left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$  に対し 3 点 P, Q, R を次のように定める。

$$P \left( 3^{\frac{1}{4}} (\cos \theta)^{\frac{3}{2}}, 3^{\frac{1}{4}} (\cos \theta)^{\frac{1}{2}} (\sin \theta), \theta \right)$$

$$Q \left( -(\sin \theta)^{\frac{3}{2}}, (\cos \theta) (\sin \theta)^{\frac{1}{2}}, \theta \right)$$

$$R (0, 0, \theta)$$

$\theta$  が 0 から  $\frac{\pi}{2}$  まで動くとき、線分 PQ が通過してできる曲面を K とし、K を z 軸の周りに 1 回転して得られる立体の体積を V とする。

問 1 2 点 P, Q に対して、線分 PQ を  $t : (1-t)$  (ただし、 $0 \leq t \leq 1$ ) に内分する点を  $S_t$  とする。 $t$  が 0 から 1 まで動くとき、2 点 R,  $S_t$  間の距離の最小値  $l$  を  $\theta$  を用いて表せ。答えのみでよい。

問 2 次の不定積分を求めよ。ただし、積分定数は省略してよい。答えのみでよい。

$$\int \frac{1}{\sin \theta} d\theta$$

問 3  $V$  の値を求めよ。

( 計 算 用 紙 )

[IV] 次で定義される関数  $f(s)$  に対して以下の各問いに答えよ。

$$f(s) = \begin{cases} \frac{s}{16} & (0 \leq s \leq 4), \\ -\frac{s}{16} + \frac{1}{2} & (4 < s \leq 8), \\ 0 & (s < 0 \text{ または } 8 < s) \end{cases}$$

問 1 関数  $t = f(s)$  のグラフと、関数  $t = f(s)$  のグラフを  $s$  軸方向に 4だけ平行移動したグラフを 1つの  $st$  平面上に図示せよ。答えのみでよい。

問 2 関数  $t = f(s)$  に対して  $s \geq 0$  を定義域とする関数  $t = F(s)$ ,  $t = G(s)$  を次で定義する。

$$F(s) = \int_0^s f(u)du, \quad G(s) = \int_0^s f(u-4)du$$

関数  $F(s)$ ,  $G(s)$  をそれぞれ求め、これら 2つの関数のグラフを 1つの  $st$  平面上に図示せよ。

問 3 問 2 で求めた関数  $F(s)$ ,  $G(s)$  に対し、 $x = G(s)$ ,  $y = F(s)$  とおく。点  $(x, y)$  の描く曲線の概形を  $xy$  平面上に図示せよ。

問 4 問 2 で求めた関数  $F(s)$ ,  $G(s)$  に対し、 $xy$  平面上の 2 点  $(0, 1)$  と  $(x, y) = (G(s), F(s))$  の間の距離の最小値を与える  $s$  の値を求めよ。

( 計 算 用 紙 )