

2020年度

慶應義塾大学入学試験問題

医 学 部

数 学

注意事項

1. 受験番号と氏名は解答用紙の所定の記入欄にそれぞれ記入してください。
2. 受験番号は所定欄の枠の中に1字1字記入してください。
3. 解答は、必ず解答用紙の所定の欄に記入してください。
4. この問題冊子の余白を計算および下書きに用いてください。
5. この問題冊子の総ページ数は12ページです。試験開始の合図とともにすべてのページが揃っているかどうか確認してください。ページの脱落や重複があったら直ちに監督者に申し出てください。
6. この問題冊子は、試験終了後に持ち帰ってください。

[1]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

- (1) 座標空間に3点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, a)$, $B(0, 1, b)$ をとり, O, A, B によって定められる平面を α とする。ただし $a > 0, b > 0$ とする。平面 α と xy 平面との交線を l とすると, l は O を通り, ベクトル $\vec{u} = (1, \boxed{\text{(あ)}}, 0)$ に平行な直線である。また平面 α と xy 平面のなす角を θ (ただし $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$) とすると, $\cos \theta = \boxed{\text{(い)}}$ である。
- (2) 関数 $f(x) = \frac{\log x}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) は $x = \boxed{\text{(う)}}$ において最大値をとる。曲線 $y = f(x)$ と直線 $x = \boxed{\text{(う)}}$ および x 軸で囲まれた図形 D の面積は $\boxed{\text{(え)}}$ である。また, 図形 D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{(お)}}$ である。
- (3) x, y を実数, i を虚数単位として $z = x + yi$ により複素数 z に対応する座標平面上の点 $P(x, y)$ を $P(z)$ または単に z と表す。方程式 $3x - 4y + 1 = 0$ で表される直線を l とする。複素数 α を $\alpha = \boxed{\text{(か)}}$ とおくと, l の方程式は $az + \bar{\alpha}\bar{z} + 1 = 0$ と書かれる。 z が l 上にあるとき $w = \frac{1}{z}$ は複素数 $\boxed{\text{(き)}}$ を中心とする半径 $\boxed{\text{(く)}}$ の円周上にある。また, 複素数 β を $\beta = \boxed{\text{(け)}}$ とおくと, l は2点 $O(0), B(\beta)$ を結ぶ線分の垂直二等分線である。 l 上にあつて $O(0)$ に最も近い点を $P_0(z_0)$ とするとき, l 上の点 $Q_1(z_1), Q_2(z_2)$ を, $\angle P_0OQ_1 = \angle P_0OQ_2 = \frac{\pi}{4}$ であり, かつ z_1 の実部が z_2 の実部より小さくなるように定めると $z_1 = \boxed{\text{(こ)}}$, $z_2 = \boxed{\text{(さ)}}$ となる。

[II]

以下の文章の空欄に適切な式を入れて文章を完成させなさい。ただし記入する式は、文字 n についての整式で、可能な限り因数分解されたものとする。

n を 2 以上の自然数とする。1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが用意されている。まず A 君がこの中から無作為に同時に 2 枚のカードを引いてその番号を記録し、カードを 2 枚とももとに戻した後、B 君が無作為に同時に 2 枚のカードを引いてその番号を記録する。

(1) A 君, B 君のうち少なくとも 1 人が番号 1 のカードを引く確率は $\frac{\boxed{\text{あ}}}{\boxed{\text{い}}}$ である。

(2) A 君と B 君が共通に引くカードが 1 枚だけである確率は $\frac{\boxed{\text{う}}}{\boxed{\text{え}}}$ である。

(3) A 君, B 君のうち、1 人のみが 2 以下の番号のカードを 1 枚以上引く確率は $\frac{\boxed{\text{お}}}{\boxed{\text{か}}}$ である。

(4) A 君が記録した番号の大きい方と、B 君が記録した番号の大きい方が一致する確率は $\frac{\boxed{\text{き}}}{\boxed{\text{く}}}$ である。

(5) A 君が記録した番号の小さい方が、B 君が記録した番号の大きい方以上である確率は $\frac{\boxed{\text{け}}}{\boxed{\text{こ}}}$ である。

[Ⅲ]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$, $g(x) = \frac{1}{\tan^2 x}$ と定める。

- (1) 定数 a を $a = \boxed{\text{(あ)}}$ と定めると, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = af(2x)$$

が成り立つ。

- (2) 自然数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} f\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right), \quad T_n = \sum_{k=1}^{2^n-1} g\left(\frac{k\pi}{2^{n+1}}\right)$$

とおく。このとき S_1, S_2, S_3 の値を求めると

$$S_1 = \boxed{\text{(い)}}, \quad S_2 = \boxed{\text{(う)}}, \quad S_3 = \boxed{\text{(え)}}$$

である。また S_n と S_{n+1} の間には $S_{n+1} = \boxed{\text{(お)}}$ の関係がある。このことから, S_n を n の式で表すと $S_n = \boxed{\text{(か)}}$ となる。また T_n を n の式で表すと $T_n = \boxed{\text{(き)}}$ である。したがって, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ に対して $\sin \theta < \theta < \tan \theta$ であることに注意すると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{2^n-1} \frac{1}{k^2} = \boxed{\text{(く)}}$$

がわかる。

[IV]

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。また設問(4)に答えなさい。

$b > 0, c > 0$ として関数 $f(x) = b\left(1 - \frac{x^2}{c}\right)$ ($0 \leq x \leq \sqrt{c}$) を考える。また曲線 $y = f(x)$ および x 軸, y 軸で囲まれた図形の面積を A とする。

(1) A を一定に保つとき, b を A と c の式で表すと $b = \boxed{\text{(あ)}}$ となる。以下この式により文字 b を消去する。

(2) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \sqrt{c}$) 上の点 $(x, f(x))$ と原点 O の距離を $r(x)$ で表す。
 $c \geq \boxed{\text{(い)}}$ のとき関数 $r(x)$ は区間 $0 \leq x \leq \sqrt{c}$ において増加し, $0 < c < \boxed{\text{(い)}}$ のとき関数 $r(x)$ は 1 点 x_0 (ただし $0 < x_0 < \sqrt{c}$) において最小値 r_0 をとる。 x_0 と r_0 を A と c の式で表すと $x_0 = \boxed{\text{(う)}}$, $r_0 = \boxed{\text{(え)}}$ である。

(3) c が $0 < c < \boxed{\text{(い)}}$ を満たしつつ変化するとき, r_0 は $c = \boxed{\text{(お)}}$ において最大値をとる。 $c = \boxed{\text{(お)}}$ のとき, 原点 O と点 $(x_0, f(x_0))$ を結ぶ線分が x 軸の正の向きとなす角を θ とすると $\cos \theta = \boxed{\text{(か)}}$ である。

(4) 曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq \sqrt{c}$) の長さを $L(c)$ とする。一般に $s \geq 0, t \geq 0$ のとき $\sqrt{s} \leq \sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$ であることを用いて

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{L(c)}{\sqrt{c}} = 1, \quad \lim_{c \rightarrow +0} \sqrt{c} L(c) = \frac{3A}{2}$$

となることを示しなさい。