

平成31年度 入学試験問題

数 学 問 題 用 紙 (前期)

試験時間	90分
問題用紙	1～8頁

注 意 事 項

1. 指示があるまで問題用紙は開かないこと。
2. 問題用紙および解答用紙に落丁、乱丁、印刷の不鮮明な箇所があったら、手を挙げて監督者に知らせること。
3. 解答が終わっても、または試験を放棄する場合でも、試験終了までは退場できない。
4. 携帯電話等の電子機器類は電源を必ず切り、鞆の中にしまうこと。
5. 机上には、受験票と筆記用具（鉛筆、シャープペンシル、消しゴム）および時計（計時機能のみ）以外は置かないこと。（耳栓、コンパス、定規等は使用できない。）
6. 問題用紙および解答用紙に受験番号と氏名を記入すること。
7. 解答はすべて解答用紙の所定の解答欄に記入すること。欄外には何も書かないこと。
8. この問題用紙の余白は自由に用いてよい。
9. 質問、トイレ、体調不良等で用件のある場合は、無言のまま手を挙げて監督者の指示に従うこと。
10. 中途退室時は、問題用紙および解答用紙を裏返しにすること。
11. 受験中不正行為があった場合は、試験の一切を無効とし、試験終了時間まで別室で待機を命じる。
12. 試験終了後、解答用紙は裏返し、問題用紙は持ち帰ること。

受験番号	
------	--

氏 名	
-----	--

[I] a を $a \neq 0, -1$ を満たす実数とする。O を原点とする xy 平面上において次の 2 つの曲線を考える：

$$C_1 : x^2 - y^2 = 1, \quad C_2 : y = ax^2 - \frac{3}{2a+2}$$

以下の各問いの答えのみを解答欄に記入せよ。

問 1 $a = 1$ のとき、 C_1 と C_2 の共有点の座標をすべて求めよ。

問 2 C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わるための a に対する必要十分条件を求めよ。

問 3 C_1 と C_2 が相異なる 4 点で交わる時、それら 4 点すべてを通る円の中心の座標を a を用いて表せ。また、その円の半径を r とするとき、以下の空欄に適する 1 以上の整数を解答欄に記入せよ。

$$r = \sqrt{\frac{-a^3 - a^2 + \boxed{\text{ア}}a + \boxed{\text{イ}}}{a^{\boxed{\text{ウ}}}(a + \boxed{\text{エ}})}}$$

(計 算 用 紙)

[II] 空間において 1 点 O をとり, 相異なる 4 点 P, A, B, C を頂点とする四面体 $PABC$ について考える。四面体 $PABC$ は点 O を中心とする半径が 1 の球に内接しており, 三角形 ABC は 1 辺の長さが l の正三角形であると仮定する。

問 1 l の取り得る値の範囲を答えよ。答えのみでよい。

問 2 $s = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB}$, $t = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}$ とおき, 点 P から三角形 ABC を含む平面に垂線 PH を下ろす。このとき, $\overrightarrow{AH}$ を l, s, t を用いて $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の 1 次結合で表せ。

問 3 問 2 において l を固定し, 点 P が $2s - t = l^2$ を満たしながら点 O を中心とする半径 1 の球面上を動くとき, 四面体 $PABC$ の体積の最大値 $V(l)$ を求めよ。

(計 算 用 紙)

[III] $f(x) = \log(1+x^2)$ ($x > 0$) とする。また、実数 a, h は

$$0 < a < 1, \quad 0 < h < 1, \quad 0 < a + h < 1$$

を満たすとする。以下の各問いに答えよ。

問1 k を正の実数とする。このとき、以下の不等式が成り立つことを示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \log(1+x) \leq x - \frac{1}{k+1} \frac{x^2}{2} \quad (0 \leq x \leq k)$$

問2 各 a, h に対して、以下の等式を満たす c ($a < c < a+h$) がただ1つ存在することを示せ。

$$f(a+h) = f(a) + f'(c)h$$

また、 d を以下のように定めたとき、 c を d を用いて表せ。

$$d = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

問3 問2において a を固定し、 c を h の関数と考えて $c(h)$ と書くことにする。また、 $\theta(h)$ を以下のように定める。

$$\theta(h) = \frac{c(h) - a}{h}$$

このとき、極限 $\lim_{h \rightarrow 0+0} \theta(h)$ を求めよ。ただし、記号 $\lim_{h \rightarrow 0+0}$ は $h > 0$ の範囲で h を 0 に限りなく近づけたときの極限を意味する。

(計 算 用 紙)

[IV] 関数 $f(x)$ は 2 回微分可能で、その 2 次までの導関数 $f'(x)$, $f''(x)$ はいずれも連続とし、すべての実数 x に対して $f''(x) \geq 0$ を満たすとする。 xy 平面上の曲線 $C: y = f(x)$ 上の点 $P(t, f(t))$ における法線上に点 $Q(a, b)$ を $PQ = 1$, $b < f(t)$ を満たすようにとるとき、以下の各問に答えよ。

問 1 $\overrightarrow{PQ}$ を求めよ。答えのみでよい。

問 2 a, b を t の式で表せ。答えのみでよい。

問 3 問 2 の a, b をそれぞれ $a(t), b(t)$ と表すとき、 $b'(t) = f'(t)a'(t)$ が成り立つことを示せ。

問 4 T_1, T_2 は $T_1 < T_2$ を満たす実数とする。 t が T_1 から T_2 まで変化するとき、2 点 P, Q が描く曲線の長さをそれぞれ $L_P(T_1, T_2)$, $L_Q(T_1, T_2)$ で表す。 $L_Q(T_1, T_2)$ と $L_P(T_1, T_2)$ の差を $\Delta L(T_1, T_2)$ とする：

$$\Delta L(T_1, T_2) = L_Q(T_1, T_2) - L_P(T_1, T_2)$$

このとき次が成り立つことを示せ。

$$\Delta L(T_1, T_2) = \int_{T_1}^{T_2} \frac{f''(t)}{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

問 5 問 4 までの結果を踏まえて、関数 $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ に対して、 $\Delta L(T_1, T_2)$ において同時に $T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow +\infty$ としたときの極限值

$$\lim_{T_1 \rightarrow -\infty, T_2 \rightarrow +\infty} \Delta L(T_1, T_2)$$

を求めよ。

(計 算 用 紙)