

平成31年度入学試験問題(後期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあげないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (後 期)

[1]

- (1) 複素数 z が $|z|=1$, $z \neq 1$, $z \neq -1$ を満たすとき, $\frac{z+1}{z-1}$ は純虚数であることを示せ。
- (2) 複素数 α, β が $\alpha \neq \beta$ を満たすとする。 $\frac{z-\beta}{z-\alpha}$ が純虚数であるような複素数 z は一つの円上にあることを示し, その円の中心と半径を求めよ。

[2] 1 から 6 までの番号をつけた 6 枚のカードから同時に 4 枚取り出し, 大きさの順にならべて, X_1, X_2, X_3, X_4

($X_1 < X_2 < X_3 < X_4$) とする。 $A = X_4 - X_1$, $B = X_3 - X_2$ とおく。

- (1) 起こりうる (X_1, X_2, X_3, X_4) の総数を求めよ。
- (2) 起こりうる (A, B) の総数を求めよ。
- (3) 確率が最大となる (A, B) とその確率を求めよ。

[3] 中心が点 O , 半径が 1 の球面 S と, O からの距離が t ($0 < t < 1$) の平面 α がある。 α と S の共通部分の円 T 上に異なる 3 点 A, B, C を, 線分の長さが $AB = BC = 1$ をみたすようにとり, T の半径を u とする。

- (1) このような 3 点 A, B, C がとれるような t の範囲を求めよ。
- (2) $\angle ABC = 2\theta$ とするとき, $\sin \theta$ を u を用いて表せ。
- (3) $\triangle ABC$ の面積を u を用いて表せ。
- (4) 四面体 $OABC$ の体積が最大になるような u の値と, そのときの体積を求めよ。

[4] n を自然数, π を円周率として, 次のようにおく:

$$f_n(x) = (1-x)^n - x^n, \quad a_n = \int_0^1 (1-x)^n \cos \pi x \, dx$$

- (1) $n \geq 1$ のとき, $0 < x < \frac{1}{2}$ において $f_n(x) > 0$ であることを示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, $0 < x < \frac{1}{2}$ において $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ であることを示せ。
- (3) $n \geq 1$ のとき, a_{n+1} と a_n の大小を調べよ。

[5] 関数 $f(x) = \frac{\frac{1}{2} + x}{1 + x^2}$ を考える。

- (1) 方程式 $f(x) = x$ の実数解を求めよ。
- (2) $\frac{3}{4} \leq x < y \leq 1$ のとき次の不等式を示せ。

$$0 < f(x) - f(y) < \frac{1}{2}(y - x)$$
- (3) $x_1 = 1, x_{n+1} = f(x_n)$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。このとき, $\frac{3}{4} \leq x_n \leq 1$ であることを示せ。
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。