

平成 30 年度 入 学 試 験 問 題 (後 期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。



## 数 学 (後 期)

[1] 中心が原点  $O$ 、半径が  $2$  の球面を  $S$  とする。  $S$  上の  $4$  点

$$A(-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), B(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}), C(0, \sqrt{2}, \sqrt{2}), D(p, q, r)$$

を頂点とする四面体  $ABCD$  を考える。

(1)  $\angle ABD$  が直角のとき  $p$  の値を求めよ。

(2) (1) の条件が成り立ち、さらに四面体  $ABCD$  の体積が  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$  のとき、点  $D$  の座標を求めよ。

[2]  $\triangle ABC$  の辺  $AB$  上の点  $P$  と辺  $AC$  上の点  $Q$  について、 $\frac{AP}{AB} = x$ ,  $\frac{AQ}{AC} = y$  とする。直線  $PQ$  は  $\triangle ABC$  の重心  $G$  を通るとする。

(1)  $x, y$  の満たす関係式を求め、 $x$  がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 面積の比の値  $\frac{\triangle APQ}{\triangle ABC}$  がとりうる範囲を求めよ。

[3]  $m, n$  を自然数とする。

(1)  $2^n + 1$  が平方数となるような  $n$  をすべて求めよ。ただし平方数とは自然数の  $2$  乗で表される整数のことである。

(2)  $m = nk$  ( $k$  は奇数) とする。このとき、 $2^m + 1$  は  $2^n + 1$  で割り切れることを示せ。

[4] 関数  $f(x), g(x)$  は微分可能で、連続な導関数  $f'(x), g'(x)$  をもち、次の式を満たすとす。

$$f(x) = g(x) - \int_0^x g'(t)f(t)dt$$

(1)  $h(x) = f(x)e^{g(x)}$  とすると、 $h'(x) = g'(x)e^{g(x)}$  であることを示せ。

(2)  $g(x) = -x^2$  のとき  $f(x)$  を求めよ。

(3)  $f(x) = -x^2$  のとき  $g(x)$  を求めよ。

[5] ●を記した札が  $4$  枚、○を記した札が  $10$  枚ある。これら  $14$  枚を袋に入れてよくかき混ぜてから  $1$  枚ずつ取り出して横一列に並べる。この  $14$  枚の札の並び方において、左端から  $7$  番目までの  $7$  枚の札の中に●が丁度  $2$  個あるという事象を  $P$ 、どの  $2$  つの●の間にも  $2$  個以上の○があるという事象を  $Q$  とする。

(1)  $4$  枚の●と  $10$  枚の○の計  $14$  枚の札の、異なる並び方の総数を求めよ。ただし札は、記された●または○以外の区別はできないとする。

(2)  $P$  が起こる確率を求めよ。

(3)  $P \cap Q$  が起こる確率を求めよ。