


平成 30 年度入学試験問題

数 学

I 注 意 事 項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で、5 ページです。設問は I から IV まであります。
3. 解答用紙のマーク数字は、次の「良い例」のように、濃く正しく塗りつぶしなさい。正しく塗りつぶされていない場合、採点できないことがあります。

良い例……………●

悪い例……………

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので、正確に記入しなさい。
 - ① 氏名欄……………氏名を漢字とフリガナで記入しなさい。
 - ② 受験番号欄……………6桁の受験番号を算用数字で記入し、マーク欄の数字を正しく塗りつぶしなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は、手を上げて申し出なさい。
6. 試験中に質問がある場合は、手を上げて申し出なさい。
7. 試験終了後、この問題冊子は持ち帰りなさい。
8. 途中退場は認めません。

II 解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので、この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし、冊子を開いてはいけません。

II 解答上の注意

- 1 問題の文中の ア , イウ などには、特に指示がないかぎり、数字(0~9)、または負の符号(-)が入ります。ア、イ、ウ、…の一つ一つは、これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア、イ、ウ、…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 アイ に-8と答えたいとき

ア	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
イ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 2 分数形で解答する場合は、既約分数(それ以上約分できない分数)で答えなさい。負の符号は分子につけ、分母につけてはいけません。

例2 $\frac{\text{ウエ}}{\text{オ}}$ に $-\frac{4}{5}$ と答えたいときは、 $\frac{-4}{5}$ として

ウ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
エ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
オ	-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

- 3 根号を含む形で解答する場合は、根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば、 $\frac{\text{カ}}{\sqrt{\text{キ}}}$, $\frac{\sqrt{\text{クケ}}}{\text{コ}}$, $\frac{\text{サ}}{\sqrt{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{13}}{2}$, $6\sqrt{2}$ と

答えるところを、 $1\sqrt{8}$, $\frac{\sqrt{52}}{4}$, $3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

問題は次のページから始まります。



I 次のように定義される2つの数列を $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ とする.

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - b_n, b_{n+1} = 4a_n + 7b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(a) $a_2 =$ であり, 数列 $\{a_n\}$ は自然数 n に対し次式を満たす.

$$a_{n+2} - pa_{n+1} = p(a_{n+1} - pa_n), \text{ ただし } p =$$
 .

したがって, 数列 $\{a_{n+1} - pa_n\}$ は, 公比 の等比数列であり,

$$a_{n+1} - pa_n =$$
 \times n^{-1} (*)

が成り立つ.

(b) 式(*)の両辺を p^{n+1} で割ると, 数列 $\left\{\frac{a_n}{p^n}\right\}$ の階差数列が定数 $\frac{\text{キク}}{\text{ケコ}}$ となることがわか

る. これより, 数列 $\{a_n\}$ の一般項は,

$$a_n = \left(\text{サシ} n + \text{ス} \right) \times \text{セ} n^{-2}$$

と求められる.

(c) 2つの数列を用いて表される極限值, および無限級数の和について,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\text{ソタ}}{\text{チ}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2a_n + b_n} = \frac{\text{ツ}}{\text{テト}}$$

が成立する.

- II 一辺の長さが6で、座標空間内の原点Oを重心とする正三角形ABCがxy平面内にあり、これと合同な正三角形によって囲まれた、図1のような正八面体ABC-DEFが $z \geq 0$ の領域にある。点Aはx軸上 $x > 0$ の領域にあり、三角形DEFの重心はz軸上に存在する。辺BCの中点をM、 $0 < t < 1$ を満たす実数tに対して、辺ADを $t : 1 - t$ に内分する点をPとして、以下の問いに答えよ。

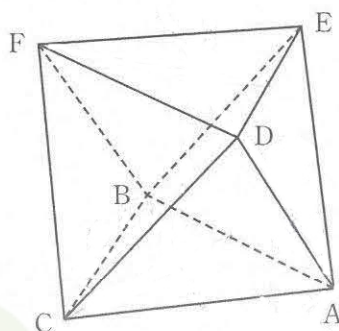


図1

(a) 点Aのx座標は $\sqrt{\text{イ}}$ 、点Dのz座標は $\sqrt{\text{エ}}$ である。

(b) $\vec{MF} = \left(\text{オ} \sqrt{\text{カ}}, 0, \text{キ} \sqrt{\text{ク}} \right)$ である。

正八面体の一辺を共有する隣あう2つの面のなす角を θ とすると、 $\cos \theta = \frac{\text{ケコ}}{\text{サ}}$ が成り立つ。

(c) 点Pを通りxy平面に平行な平面で正八面体を切ったとき、断面の図形は、周の長さが である 角形となる。

tを $0 < t < 1$ の範囲で変化させると、 $t = \frac{\text{ソ}}{\text{タ}}$ のとき、この断面の面積が最大値

$\frac{\text{チツ}}{\text{テ}} \sqrt{\text{ト}}$ をとり、断面の外接円の半径が となる。

Ⅲ x を実数、 $f(x) = |x^2 - x - 6|$ として、以下の問いに答えよ。

(a) 不等式 $f(x) > 2x + 6$ の解は

$$x < \frac{\boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}, \quad \boxed{\text{オカ}} < x < \boxed{\text{キ}},$$

$$\frac{\boxed{\text{ア}} + \sqrt{\boxed{\text{イウ}}}}{\boxed{\text{エ}}} < x$$

である。

(b) 方程式 $f(x) = 2x + k$ が異なる3つの実数解を持つように、定数 k の値を求めると、

$$k = \boxed{\text{ク}} \quad \text{または} \quad \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}} \quad \text{となる。}$$

(c) 区間 $-3 < x < 4$ において、 $y = \sin(f(x))$ のグラフには、極大となる点が $\boxed{\text{シ}}$ 個存在

する。これらの点のうち、極大値が1未満となるのは、 $x = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ のときである。

IV 実数 x に対して, $f(x)$ は, $x \neq 0$ のとき $f(x) = -|x| \log_e |x|$ であり, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ を満たす関数として定義する. 必要があれば $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_e x}{x} = 0$ を用いてよい.

(a) $f(0) = \boxed{\text{ア}}$ である.

(b) $f(x)$ の最大値を α , $f(x)$ の最大値を与える x の値を β とすると, $\log_e \alpha = \boxed{\text{イウ}}$, $\log_e |\beta| = \boxed{\text{エオ}}$ が成り立つ.

(c) $t \neq 0$ を満たす実数 t に対し, 点 $(t, f(t))$ における曲線 $y = f(x)$ の接線を考える. 接線が点 $(-1, 1)$ を通るとき, 接点の x 座標 t は,

$$t + \log_e |t| = \boxed{\text{カ}} \text{ または } \boxed{\text{キク}}$$

を満たし, このような接線は $\boxed{\text{ケ}}$ 本存在する.

(d) $0 < k < |\beta|$ を満たす定数 k に対し, $x \geq k$ の領域において直線 $x = k$, 曲線 $y = f(x)$ および x 軸によって囲まれる図形の面積を $S(k)$, この図形を y 軸の回りに 1 回転してできる立体の体積を $V(k)$ とすると,

$$\lim_{k \rightarrow 0} S(k) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} V(k) = \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}} \pi$$

が成り立つ.