

選抜Ⅱ期

数 学

解答は、最終結果のみを解答用紙の所定の解答欄に記入すること。途中経過は記述しないこと。

1 以下の各問いに答えよ。

- (1) $(x^6 + x^3y^3 + y^6)(x^2 + xy + y^2)(x - y)$ を展開せよ。
- (2) $xyz + 3xy + yz + 2zx + 6x + 3y + 2z + 6$ を因数分解せよ。
- (3) $|x^2 + 4x + 3| < 2x + 6$ を満たす x の範囲を求めよ。
- (4) 実数 x, y をそれぞれ $x = \sqrt{6 - \sqrt{32}}, y = \sqrt{6 + \sqrt{32}}$ とするとき、 $x + y$ の値を求めよ。
- (5) $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ のとき、不等式 $2 \sin^2 x - 3 \cos x \leq 0$ を解け。

2 以下の各問いに答えよ。

- (1) 216 の正の約数について、その逆数の総和を求めよ。
- (2) 異なる本が 16 冊ある。その中から少なくとも 1 冊以上何冊でも好きなだけ本を取り出すとき、取り出し方は何通りあるか。
- (3) 11 人が 1 列に並ぶとき、特定の 2 人が隣り合う確率を求めよ。
- (4) x, y を $1 \leq x \leq y$ を満たす自然数とする。このとき $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$ を満たす自然数の組 (x, y) をすべて求めよ。

3 実数 x, y について $2x^2 + y^2 = 18 \cdots \textcircled{1}$ のとき、 $x^2 + y^2 - 4x - 16 \cdots \textcircled{2}$ の最大値、最小値について考える。以下の各問いに答えよ。

- (1) $y^2 \geq 0$ および $\textcircled{1}$ より、 x のとりうる範囲を求めよ。
- (2) $\textcircled{2}$ の最大値、最小値とそのときの x の値を求めよ。

4 $2 - i$ を1つの解としてもつ実数係数の3次方程式 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \cdots \textcircled{1}$ について以下の各問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位である。

- (1) b, c を a で表せ。
- (2) $\textcircled{1}$ の実数解を a で表せ。
- (3) 方程式 $\textcircled{1}$ と方程式 $x^2 - bx + 22 = 0$ が1つの実数解を共有するとき、 a, b, c の値の組をすべて求めよ。

5 平面上で点 O を中心とした半径1の円周上に相異なる2点 A, B をとる。点 O, A, B は一直線上にないものとする。 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とし、 \vec{a} と \vec{b} の内積を α とおく。 $0 < t < 1$ に対して、線分 AB を $t : (1 - t)$ に内分する点を C とする。点 P, Q を

$$\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

となるようにとり、直線 OQ と直線 AB の交点を D とする。

- (1) \overrightarrow{OD} を \vec{a}, \vec{b} および t を用いて表せ。
- (2) 三角形 OAD の面積を t と α を用いて表せ。
- (3) \overrightarrow{OP} と \overrightarrow{OQ} が直交するような t の値がただ一つ存在するための必要十分条件を α を用いて表せ。

6 $AB = BD = DC = CA = 5$, $BC = AD = 4$ を満たす四面体 ABCD について以下の各問いに答えよ。

- (1) 辺 BC の中点を M とするとき, AM の長さを求めよ。
- (2) 辺 AD の中点を N とするとき, MN の長さを求めよ。
- (3) 三角形 AMD の面積を求めよ。
- (4) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

7 袋の中に赤球が 4 個, 白球が 3 個入っている。この中から 1 個ずつ取り出し, 取り出した球はもとに戻さない。1 回目に取り出した球が赤であるという事象を A, 2 回目に取り出した球が白であるという事象を B とする。このとき, 次の各確率を求めよ。ただし, 事象 X が起こったという条件のもとで事象 Y が起こる (条件付き) 確率を $P_X(Y)$ で表す。

- (1) $P_A(B)$
- (2) $P(A \cap B)$
- (3) $P(\bar{A} \cap B)$