

選抜 I 期

数 学

解答は、最終結果のみを解答用紙の所定の解答欄に記入すること。途中経過は記述しないこと。

1 以下の各問いに答えよ。

- (1) $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ を展開せよ。
- (2) $2x^3 - x^2 - 8x + 4$ を因数分解せよ。
- (3) $x + y + z = 6$, $xy + yz + zx = 11$, $xyz = 6$ のとき, $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2$ の値を求めよ。
- (4) $3x^2 + 4x - 4 > 0$, $-2x^2 + 5x + 3 \leq 0$ をともに満たす x の範囲を求めよ。
- (5) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) のとき, $\sin \theta - \cos \theta$ の値を求めよ。

2 以下の各問いに答えよ。

- (1) 15 以下の自然数のうち, 15 と互いに素であるものの個数を求めよ。
- (2) 赤玉 3 個, 白玉 5 個が入っている袋から同時に 2 個の玉を取りだすとき, 2 個とも同じ色である確率を求めよ。ただし, どの玉の取り出し方も同様に確からしいものとする。
- (3) 方程式 $3x - 4y = 2$ を満たす整数 (x, y) に対して, $x^2 - y^2$ の最小値とそのときの x, y の値を求めよ。
- (4) 2 つの正の整数 m, n ($m > n$) があって, 最大公約数は 4, また $mn = 240$ であるとき, m, n の組をすべて求めよ。

3 x についての 2 次関数 $f(x) = -x^2 - 2ax - 2a + 5$ ($x \geq -1$) の最大値を $g(a)$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) $g(a)$ を a の範囲で場合分けして, a で表せ。
- (2) $g(a)$ の最小値を求めよ。

4 3次関数 $f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx + c$ は、 $x = -1$ と $x = 2$ で極値をとり、曲線 $y = f(x)$ は点 $P(1, -5)$ を通るといふ。

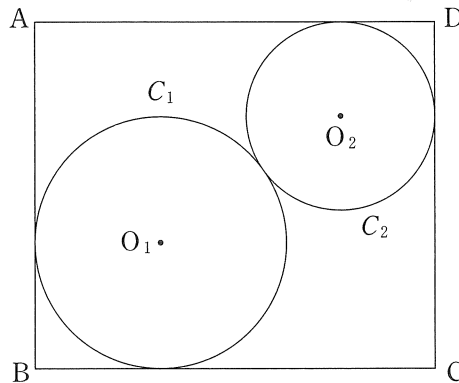
- (1) 定数 a 、 b 、 c を求めよ。
- (2) 曲線 $y = f(x)$ 上の点 P における接線が、この曲線と P 以外の点 Q で交わるとき、この接線の方程式と点 Q の座標を求めよ。
- (3) 線分 PQ と曲線 $y = f(x)$ とで囲まれる図形の面積 S を求めよ。

5 $a_1 = 0$ 、 $a_{n+1} = 3a_n + 5^n$ ($n \geq 1$)で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。以下の各問いに答えよ。

- (1) $\frac{a_n}{3^n} = b_n$ とおくとき、 $b_{n+1} - b_n$ を n の式で表せ。
- (2) b_n を n で表せ。
- (3) a_n を n で表せ。

6 長方形 ABCD の内部に互いに外接する 2 つの円 C_1 , C_2 がある。 C_1 は, AB, BC, C_2 は CD, DA にそれぞれ接している。 C_1 , C_2 の中心をそれぞれ O_1 , O_2 , 半径をそれぞれ r_1 , r_2 とする。 O_1 を通り AB に平行な直線と, O_2 を通り BC に平行な直線の交点を E とする。 $AD = 7$, $O_1O_2 = 4$ とするとき, 以下の各問いに答えよ。

- (1) O_2E , AB の長さを求めよ。
- (2) C_1 , C_2 の面積の和を S とするとき, S を r_1 で表せ。
- (3) r_1 のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) S の最大値, 最小値を求めよ。



7 以下の(1)~(5)のそれぞれの に入るものとして, 適切なものを以下の①~④から 1 つ答えよ。

- ① 必要条件ではあるが十分条件ではない
 - ② 十分条件ではあるが必要条件ではない
 - ③ 必要十分条件である
 - ④ 必要条件でも十分条件でもない
- (1) $x^2 = 9$ は $x = -3$ であるための 。
 - (2) $|y - 1| < 3\sqrt{3}$ は $|y| < 3$ であるための 。
 - (3) 整数 m, n について, $m + n$ が 5 の倍数であることは, $6m + n$ が 5 の倍数であることの 。
 - (4) $\angle A = 60^\circ$ は, 三角形 ABC が正三角形であることの 。
 - (5) 「 $xy \neq 5$ 」は「 $x \neq 1$ または $y \neq 5$ 」であるための 。