

問題 [I] 初項 2, 公差 3 の等差数列を $\{a_n\}$ とおく。また $2 \leq k$ とする。このとき、次の答えなさい。

$$(1) a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2 = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \left(\boxed{\text{ウ}} k^2 + \boxed{\text{エ}} k - \boxed{\text{オ}} \right) \text{である。}$$

(2) この等差数列を用いて関数 $f(x) = (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_k)$ を考える。このとき関数 $f(x)$ の x^{k-2} の係数は $\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}} \left(\boxed{\text{ク}} k^3 - \boxed{\text{ケ}} k^2 - \boxed{\text{コ}} k + \boxed{\text{サ}} \right)$ である。

(3) 関数 $f(x+1) - f(x)$ の x^{k-2} の係数は $\frac{\boxed{\text{シ}} \left(\boxed{\text{ス}} - \boxed{\text{セ}} \right) \left(\boxed{\text{ソタ}} + \boxed{\text{チ}} \right)}{\boxed{\text{ツ}}}$ である。

問題 [II] 三角形 ABC において $AB = 6, BC = 4, CA = 5$ とする。また、外接円の中心を O とおく。このとき、次の問に答えなさい。

(1) $\angle BAC = \theta$ とおくと $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。また、三角形 OBC の面積は $\frac{\boxed{\text{ウエ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

(2) 辺 BC を $k : 1 - k$ に分ける点を P とおく。ただし $0 < k < 1$ とする。このとき $AP^2 = \boxed{\text{キク}} k^2 - \boxed{\text{ケコ}} k + \boxed{\text{サン}}$ である。

(3) 点 A がない方の弧 \widehat{BC} 上に点 D をとる。 $BD = 2$ となるとき $CD = \frac{-\boxed{\text{ス}} + \sqrt{\boxed{\text{セソ}}}}{\boxed{\text{タ}}}$ である。また、点 D が点 B から点 C まで動くとき、

三角形 BDC の面積の最大値は $\frac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

問題 [III] $0 \leq t \leq 1$ の範囲で線分 $l_t: y = t^2x - t^3$ ($0 \leq x \leq 3$) が動く。このとき、次の問に答えなさい。

(1) 線分 l_1 と線分 $l_{\frac{1}{2}}$ の交点の座標は $\left(\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}, \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \right)$ である。

(2) 線分 l_t 上の点 (x, y) が動く領域 D は

$$0 \leq x \leq \boxed{\text{オ}} \text{ のとき } x - \boxed{\text{カ}} \leq y \leq \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{クケ}}} x \boxed{\text{コ}}$$

$$\boxed{\text{オ}} \leq x \leq \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ のとき } \boxed{\text{ス}} \leq y \leq \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソタ}}} x \boxed{\text{チ}}$$

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \leq x \leq 3 \text{ のとき } \boxed{\text{ツ}} \leq y \leq x - \boxed{\text{テ}}$$

である。

(3) 領域 D の面積は $\frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌ}}}$ である。