

1 実数 x, y が $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 \leq 0$, $x - y - 2 \leq 0$ を満たすとき, $k = \frac{y-1}{x-2}$ の最大値と最小値を求めよ。

2 $a_1 = -\frac{5}{3}$, $a_{n+1} = -\frac{3a_n+12}{2a_n+7}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定められた数列 $\{a_n\}$ について,

(a) $b_n = a_n + 2$ において, b_{n+1} を b_n で表せ。

(b) 一般項 $\{a_n\}$ を求めよ。

3 台形 AOBC は, 辺 AC と辺 OB が平行で, $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ となっている。辺 OB は辺 AC の 3 倍の長さとなっている。辺 BC の中点を X, 辺 OB を 4:5 に内分する点を Y とする。辺 AC の長さを r とおき, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ とおく。

(a) $\vec{AX}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(b) $\vec{YX}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(c) $\angle AYX = \frac{\pi}{2}$ となった場合, 辺 OA の長さはいくらか。

4 次の (a), (b) の問いに答えよ。

(a) 3 次方程式 $-x^3 + 3x^2 + 24x - m = 0$ が 2 つの異なる正の解と 1 つの負の解を持つような定数 m の値の範囲を求めよ。

(b) 関数 $f(x) = -(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 + 8\log_2 x^3 - 72$ の $8 < x < 32$ における最大値と, その最大値をとるときの x の値を求めよ。

5 5 種類の異なる香りの香水をしみこませた紙切れをそれぞれ 5 枚ずつ計 25 枚用意する。これらを袋に入れた後, その中からランダムに 1 枚ずつ紙切れを取り出して香りを嗅ぐことを 5 回繰り返す。取り出した紙切れは元へは戻さないものとする。このようにして 1 回目から 5 回目まで嗅いだ香りのうち, 同じ香りがした回を答えるという遊びを行うことにする。香りは常に正しく嗅ぎ分けられるものとする。

同じ香りがした回を () でひとつくりにして小さい方から順に左から並べ, () 内の最も左側の数字が小さいものから順に () を左から並べて答えを表す。例えば, (1), (2, 3, 5), (4) であれば, 2・3・5 回目と同じ香りで, 1 回目と 4 回目はそれとはそれぞれ異なる香りがしたことを意味する。

(a) 答えが (1, 2, 3, 4, 5) となる確率を求めよ。

(b) 答えが (1), (2), (3), (4), (5) となる確率を求めよ。

(c) 5 回嗅いだ香りのうち, ある香りが 2 回, それとは異なる香りが 2 回, そしてそのどちらとも異なる香りが 1 回するような答えの組み合わせは全部で何通りあるか, 答えよ。