数　　学

（医　学　部）

— 2月3日 —

解答はすべて解答用紙に記入して提出しなさい。

次の空欄を埋めなさい．

解答は，分数の場合には既約分数の形で，自然数の根号を含む場合には根号の中が最小の自然数となる形で書きなさい．

1

(1) $\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{9x^2+7x+5}+3x\right) =$ [ア]

(2) 0，1，2，3，4，5の6個の数字から異なる3個の数字を選んで，3桁の整数をつくるとき，433より小さな偶数は [イ] 個である．

(3) $\tan\alpha = \sqrt{2}+\sqrt{3}$，$\tan\beta = 3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ であるとき

$$\tan(\alpha+\beta) = [\text{ウ}]\sqrt{2} + [\text{エ}]\sqrt{3}$$

である．ただし，[ウ]，[エ] は有理数とする．

(4) 5311と7379の最大公約数は [オ] である．

(5) 不等式 $|2(x-1)|+|y-2| \leqq 4$ を満たす整数 x，y の組の個数は [カ] 個である．

(6) 関数 $F(x) = \int_0^x (x^2+t)\sin 5t\,dt$ のとき，$F''\left(\frac{\pi}{2}\right) =$ [キ] である．

(7) 複素数 $\alpha = \frac{2+\sqrt{5}\,i}{3}$ において，$27\left(1+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}\right) = a+bi$ とするとき

$$a = [\text{ク}],\ b = [\text{ケ}]$$

である．ただし，a，b は実数，i は虚数単位とする．

2

△OABにおいて，OA = 4，OB = 5，AB = 7とする．$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とする．

(1) ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a}\cdot\vec{b} =$ [ア] である．

(2) △OABの外心をPとし，$\overrightarrow{OP} = s\vec{a}+t\vec{b}$ とする．ただし，s，t は実数である．

$|\overrightarrow{OP}-\vec{a}| = |\overrightarrow{OP}|$ であるから，[イ] $s+$ [ウ] $t+$ [エ] $= 0$ が成り立つ．

ただし，[イ] は正の整数で，[ウ]，[エ] は整数である．

$|\overrightarrow{OP}-\vec{b}| = |\overrightarrow{OP}|$ であるから，[オ] $s+$ [カ] $t+$ [キ] $= 0$ が成り立つ．

ただし，[オ] は正の整数で，[カ]，[キ] は整数である．よって，

$$s = [\text{ク}],\ t = [\text{ケ}]$$

である．

(3) △OAB の垂心を Q とする．$\overrightarrow{OQ}-\vec{a}$ と $\vec{b}$ が垂直であり，$\overrightarrow{OQ}-\vec{b}$ と $\vec{a}$ が垂直であるから

$$\overrightarrow{OQ} = \boxed{\text{コ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{サ}}\,\vec{b}$$

である．

(4) △OAB の内心を R とする．∠AOB の二等分線と辺 AB の交点を C とし，∠ABO の二等分線と辺 OA の交点を D とする．このとき

$$\overrightarrow{OC} = \boxed{\text{シ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{ス}}\,\vec{b}$$
$$\overrightarrow{OD} = \boxed{\text{セ}}\,\vec{a}$$

である．内心 R は，線分 OC と線分 BD の交点であるから

$$\overrightarrow{OR} = \boxed{\text{ソ}}\,\vec{a} + \boxed{\text{タ}}\,\vec{b}$$

である．

3 $f(x) = x^3-6x^2+8x+16$ とする．曲線 $C_1 : y = f(x)$ と放物線 $C_2 : y = x^2$ を考える．

(1) 曲線 C_1 と放物線 C_2 の共有点の x 座標は 4 と $\boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 曲線 C_1 と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(3) 曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は

$$y = (\boxed{\text{ウ}})x + (\boxed{\text{エ}})$$

である．ただし，$\boxed{\text{ウ}}$，$\boxed{\text{エ}}$ は t についての整式である．

この接線と放物線 C_2 の共有点の x 座標は方程式

$$x^2 - (\boxed{\text{ウ}})x - (\boxed{\text{エ}}) = 0$$

の解である．この 2 次方程式の判別式を $D(t)$ とする．

(4) $D(t)$ は $t = \boxed{\text{オ}}$，$\boxed{\text{カ}}$，$\boxed{\text{キ}}$ で極値をとる．ただし，$\boxed{\text{オ}} < \boxed{\text{カ}} < \boxed{\text{キ}}$ とする．

(5) $\boxed{\text{ア}} < t < 4$ とする．曲線 C_1 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と放物線 C_2 で囲まれた図形の面積を $S(t)$ とする．$(6\times S(t))^{\frac{2}{3}}$ の極大値は $\boxed{\text{ク}}$，極小値は $\dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{27}$ である．ただし，$\boxed{\text{ク}}$，$\boxed{\text{ケ}}$ は整数である．