数　学

$\boxed{1}$ 空間内に，同じ平面上にない4つの点 O, A, B, C がある。ΔOAB, ΔOAC の重心をそれぞれ G, G′ とし，線分 OC を 2 : 3 に内分する点を P，線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。ただし，t は $0<t<1$ なる定数である。また，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。以下の $\boxed{①}$ から $\boxed{⑩}$ に答えなさい。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\boxed{①}\vec{a}+\boxed{②}\vec{b}+\boxed{③}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\boxed{④}\vec{a}+\boxed{⑤}\vec{b}+\boxed{⑥}\vec{c}$ である。また線分 GG′ と線分 PQ が交わるとき $t=\boxed{⑦}$ であり，線分 GG′ と線分 PQ の交点 R は線分 PQ を $\boxed{⑧}:\boxed{⑨}$ に内分する。さらに，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\dfrac{2}{5}$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\dfrac{4}{15}$ で，線分 PQ と線分 OP が直交するならば，$|\vec{c}|=\boxed{⑩}$ である。

なお，この空間の任意のベクトル $\vec{m}$ は，実数 u，v，w を用いて，

$$\vec{m}=u\vec{a}+v\vec{b}+w\vec{c}$$

の形に表すことができ，しかも，表し方はただ1通りである。

$\boxed{2}$ n を自然数，c および d を実数として，数列 $\{a_n\}$ を初項 c，公差 d の等差数列，数列 $\{b_n\}$ を初項3，公差2の等差数列とするとき，以下の設問に答えなさい。

〔1〕 $d\neq 0$ のとき，

$$\sum_{k=1}^{n} e^{a_k} = \boxed{\quad ① \quad}$$

となる。ただし，e は自然対数の底とする。

〔2〕 数列 $\{f_n\}$ の第 n 項を $f_n=b_n e^{a_n}$ と定義する。

$d=-0.08$ のとき，f_n の値が最大になるのは $n=\boxed{②}$ のときである。

3 関数 $f(x)$ は,

(i) $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=2$

(ii) $\displaystyle\int_0^t \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx = t^3+t \quad (t>0)$

を満たすものとする。

このとき，以下の設問に答えなさい。

〔1〕 この条件を満たす関数 $f(x)$ は

$f(x)=\boxed{\quad ① \quad}$

または

$f(x)=\boxed{\quad ② \quad}$

である。

〔2〕 曲線 $y=\boxed{\quad ① \quad}$ および曲線 $y=\boxed{\quad ② \quad}$ の交点の座標をすべて求めなさい。

ただし，$\boxed{\quad ① \quad}$，$\boxed{\quad ② \quad}$ は上問〔1〕で求めた関数とする。

〔3〕 点 (x,y) が上問〔2〕の 2 曲線 $y=\boxed{\quad ① \quad}$ および $y=\boxed{\quad ② \quad}$ で囲まれた範囲（境界を含む）を動くとき，$\sqrt{7}x+3y$ の最小値を求めなさい。

4 行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $(ad-bc\neq 0)$ は，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & f \end{pmatrix}$ (a, b, c, d, e, f は実数)，および $ad-bc=f$ を満たすものとする。

このとき，以下の設問に答えなさい。

〔1〕 $a-d=0$ および $b+c=0$ が成り立つことを示しなさい。

〔2〕 行列 A が，$A^4=\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ を満たしているとき，このような A をすべて求めなさい。

以　上

◇MII(253—3)