数　　学

1 ～ 10 ページ（問題は1, 3, 5, 7, 9ページにあります。）

注　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません。
2. 解答時間は**75分間**です。
3. 解答用紙は**マークシート解答用紙1枚**と**記述式問題解答用紙1枚**の合計**2枚**です。
4. マークシート解答用紙の記入にあたっては，**解答用紙の注意事項**を参照し，HBの鉛筆を使用して丁寧にマークしなさい。
5. 受験番号，氏名，フリガナを**マークシート解答用紙**に記入しなさい。受験番号は記入例を参照して，正しくマークしなさい。
6. 受験番号を，**記述式問題解答用紙**の所定欄に記入しなさい。
7. マークの訂正には，消しゴムを用い，消しくずは丁寧に取り除きなさい。
8. 試験開始後，ただちにページ数を確認し，落丁や印刷の不鮮明なものがあれば申し出なさい。
9. 試験終了後，**解答用紙2枚を提出しなさい**。問題冊子は**持ち帰りなさい**。
10. マークシート解答用紙は折り曲げないようにしなさい。

マークシート解答用紙の受験番号記入例

数字の位置	受験番号				
	万	千	百	十	一
	1	*2*	*3*	*4*	*5*
0	⓪	⓪	⓪	⓪	⓪
1	●	①	①	①	①
2	②	●	②	②	②
3	③	③	●	③	③
4	④	④	④	●	④
5	⑤	⑤	⑤	⑤	●
6	⑥	⑥	⑥	⑥	⑥
7	⑦	⑦	⑦	⑦	⑦
8	⑧	⑧	⑧	⑧	⑧
9	⑨	⑨	⑨	⑨	⑨

問題 [1]，[2]，[3] は，マークシートに解答を記入しなさい．ただし，分数は既約分数で答え，平方根を含む解答は平方根の中をできるだけ簡単にして答えなさい．問題[4]，[5] は，「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい．

[1]

(1)　2 次方程式 $3x^2+5x+8=0$ の 2 つの解を α, β とするとき，

$\alpha^2+\beta^2=-\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{3}}$，$\alpha^3+\beta^3=\dfrac{\boxed{456}}{\boxed{78}}$ である．

(2)　連立不等式

$$\begin{cases} x^2+\dfrac{4}{3}x-\dfrac{4}{3}\leqq 0 \\ |3x+1|\leqq 4 \end{cases}$$

を解くと，$-\dfrac{\boxed{9}}{\boxed{10}}\leqq x\leqq\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$ である．

(3)　円に内接する四角形 ABCD において，

$\mathrm{AB}=2\sqrt{3}$，$\mathrm{BC}=2$，$\mathrm{CD}=\sqrt{2}$，$\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$　であるとき，

$\mathrm{AD}=\dfrac{\sqrt{\boxed{13}\boxed{14}}-\sqrt{\boxed{15}}}{\boxed{16}}$ である．

(4)　3つの直線

$$\begin{cases} x-2y-4=0 \\ 2x+y-3=0 \\ m^2x+my-2m-9=0 \end{cases}$$

が 1 点で交わるような定数 m の値は $m=\boxed{17}$，$-\dfrac{\boxed{18}}{\boxed{19}}$ である．

計算用余白

計算用余白

[5] 曲線 K

$$\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t, \quad (0 \leqq t \leqq 2\pi) \end{cases}$$

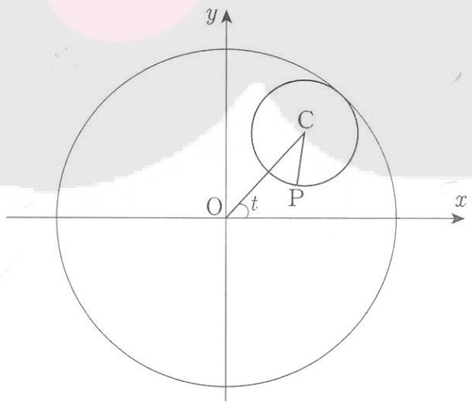
について，以下の問に答えなさい．

(1)　$0 \leqq t \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ における曲線 K の長さを求めなさい．

(2)　円 O : $x^2 + y^2 = 3^2$ に円 C : $(x-2)^2 + y^2 = 1$ が点 $(3,\ 0)$ で内接している．この接点における円 C 上の点を P とする．円 C を円 O に内接させながら，すべらないように O を中心として反時計回りに回転させる．このとき，点 P が動く軌跡は上の曲線 K に一致する．その理由を説明した以下の文章の空欄を適切な数式で補いなさい．答えはすべて解答用紙に記入しなさい．

「簡単のため，$0 \leqq t \leqq \dfrac{1}{2}\pi$ で考える．円 C の中心を C とするとき，線分 OC と x 軸のなす角を t とする．
このとき，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ とベクトル $(1,\ 0)$ とのなす角は（　(ア)　）である．
よって $\overrightarrow{\mathrm{CP}} =$（　(イ)，(ウ)　）と表せる．一方，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} =$（　(エ)，(オ)　）であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$ より，K に一致することがわかる．」

(3)　曲線 K の概形を描きなさい．



[2]

(1)　2，2，3，3，3，5，5 の 7 個の数字から 6 個を使って 6 桁の整数を作るとき，6 桁の整数は $\boxed{20}\boxed{21}\boxed{22}$ 通りできる．また，そうして作った 6 桁の整数のうち，5 の倍数になるものは $\boxed{23}\boxed{24}$ 通りある．

(2)　関数 $y=\sin^2 x\cos x+\sin x\cos^2 x+\sin x\cos x$，(ただし $0\leqq x\leqq\pi$)，において，$t=\sin x+\cos x$ とおいて y を t の式で表すとき，t の取り得る値の範囲は

$-\boxed{25}\leqq t\leqq\sqrt{\boxed{26}}$ である．また，y の最小値は $-\dfrac{\boxed{27}\boxed{28}}{\boxed{29}\boxed{30}}$ である．

(3)　x の方程式 $2^{2x}-4\cdot 2^{-x}=6$ を解くために，$X=2^x$ とおいて X の方程式として表すと

$$X^{\boxed{31}}-\boxed{32}X-\boxed{33}=0$$

である．よって，$x=\log_2\left(\boxed{34}+\sqrt{\boxed{35}}\right)$ である．

(4)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，つぎを満たす．

$$\begin{cases} a_1=\dfrac{3}{4},\ a_2=3 \\ S_{n+2}-5S_{n+1}+4S_n=0\ \ (n=1,2,3,\cdots\cdots) \end{cases}$$

このとき，$S_{n+1}-S_n=a_2\cdot\boxed{36}^{n-\boxed{37}}$ を得るので a_n を求めることができる．

よって，例えば $a_6=\boxed{38}\boxed{39}\boxed{40}$ である．

計算用余白

数　学

計算用余白

以下の問題 [4], [5] は,「数学記述式問題解答用紙」に解答しなさい.

[4] $0 < r < 1$ である定数 r を選び, $n = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ に対して関数 $f_n(x)$ をつぎで定める.

$$\begin{cases} f_n(x) = r^n \sin^3\left(r^{-n}\left\{x - \left(\dfrac{1-r^n}{1-r}\right)\pi\right\}\right), \ (a_n \leqq x \leqq b_n) \\ \text{ただし, } a_n = \dfrac{1-r^n}{1-r}\pi, \ \ b_n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}\pi. \end{cases}$$

また, $c_n = \displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f_n(x)\,dx$, $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とおく. 以下の問いに答えなさい.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^3 x\,dx$ を求めなさい.

(2) c_1 を求めなさい.

(3) c_n を求めなさい.

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} c_k$ を求めなさい.

計算用余白

[3] 原点 O の座標平面上に，円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ と円 $C_2 : (x-6)^2 + (y+6)^2 = 3^2$ がある．動点 P_1 は円 C_1 上を，時刻 $t=0$ で点 $(1,\ 0)$ から出発し，角速度 $\frac{1}{2}\pi$ で反時計回りにまわる．一方，動点 P_2 は円 C_2 上を時刻 $t=0$ で点 $(9,\ -6)$ を出発し，角速度 $\frac{7}{10}\pi$ で時計回りにまわる．ここで角速度とは 1 秒間に回転する角度の大きさを表すものとする．以下の問いに答えなさい．

(1) 動点 P_1 と動点 P_2 の距離が最短となるとき，P_1 の座標は $\left(\dfrac{\sqrt{\boxed{41}}}{\boxed{42}},\ -\dfrac{\sqrt{\boxed{43}}}{\boxed{44}}\right)$ であり，$\overline{P_1P_2} = \boxed{45}\sqrt{\boxed{46}} - \boxed{47}$ である．

(2) 動点 P_1 と P_2 が時刻 $t=0$ で同時に出発してから，(1) の状態に初めてなるのは $\dfrac{\boxed{48}\boxed{49}}{\boxed{50}}$ 秒後である．

(3) 円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，第 1 象限を通りかつ傾きが -1 より大きいほうを l とする．l と円 C_2 との接点を T，C_2 の中心を S とする．$\overrightarrow{SO}$ と $\overrightarrow{ST}$ のなす角を θ とするとき，$\tan\theta = \sqrt{\boxed{51}\boxed{52}}$ である．

また，l の傾きは $\dfrac{-\boxed{53} + \sqrt{\boxed{54}\boxed{55}}}{\boxed{56}}$ であり，直線 $y = -x$ と l の交点の座標は $\left(-\boxed{57},\ \boxed{58}\right)$ である．