平成 29 年度入学試験問題

数　　学

I 注 意 事 項

1. 指示があるまでこの冊子の中を見てはいけません。
2. この冊子は全部で，5ページです。**設問はⅠからⅣまであります。**
3. 解答用紙のマーク数字は，次の「良い例」のように，濃く正しく塗りつぶしなさい。**正しく塗りつぶされていない場合，採点できないことがあります。**

良い例………

悪い例………

4. 解答用紙には解答欄の他に次の記入欄があるので，正確に記入しなさい。
   ① 氏名欄……………………氏名を**漢字**と**フリガナ**で記入しなさい。
   ② 受験番号欄………………6桁の受験番号を**算用数字**で記入し，**マーク欄の数字**を正しく塗りつぶしなさい。
5. 試験中に問題冊子の印刷不鮮明，ページの落丁・乱丁および解答用紙の汚れなどに気がついた場合は，手を上げて申し出なさい。
6. 試験中に質問がある場合は，手を上げて申し出なさい。
7. 試験終了後，この問題冊子は持ち帰りなさい。
8. 途中退場は認めません。

Ⅱ 解答上の注意

解答上の注意が裏表紙に記載してあるので，この問題冊子を裏返して必ず読みなさい。ただし，冊子を開いてはいけません。

Ⅱ 解答上の注意

1 問題の文中の $\boxed{\text{ア}}$ ，$\boxed{\text{イウ}}$ などには，特に指示がないかぎり，数字（0～9），または負の符号（－）が入ります。ア，イ，ウ，…の一つ一つは，これらのいずれか一つに対応します。それらを解答用紙のア，イ，ウ，…で示された解答欄にマークして答えなさい。

例1 $\boxed{\text{アイ}}$ に－8と答えたいとき

ア	●　⓪　①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨
イ	⊖　⓪　①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　●　⑨

2 分数形で解答する場合は，既約分数（それ以上約分できない分数）で答えなさい。負の符号は分子につけ，分母につけてはいけません。

例2 $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ に $-\dfrac{4}{5}$ と答えたいときは，$\dfrac{-4}{5}$ として

ウ	●　⓪　①　②　③　④　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨
エ	⊖　⓪　①　②　③　●　⑤　⑥　⑦　⑧　⑨
オ	⊖　⓪　①　②　③　④　●　⑥　⑦　⑧　⑨

3 根号を含む形で解答する場合は，根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

例えば，$\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{クケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$，$\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$ に $2\sqrt{2}$，$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$，$6\sqrt{2}$ と答えるところを，$1\sqrt{8}$，$\dfrac{\sqrt{52}}{4}$，$3\sqrt{8}$ のように答えてはいけません。

I $\boxed{ア}$，$\boxed{ケ}$ の解答は該当する解答群の中から最も適当なものをそれぞれ1つずつ選べ．

3人の力士A，B，Cが下記巴(ともえ)戦のルールに従い相撲をとり，優勝者を決める．

- 1回目の取り組みは力士AとBが対戦する．
- n を2以上の自然数として，n 回目の取り組みは，$n-1$ 回目の取り組みの勝者と，その取り組みに参加していなかった力士が対戦する．
- 2連勝した力士を優勝とし，優勝者が決定した時点で巴戦は終了とする．

1回の取り組みで，力士AがBに勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$，BがCに勝つ確率は p，CがAに勝つ確率は $1-p$ であり，相撲の勝負に引き分けはないものとして，以下の問いに答えよ．

(a) 3回目の取り組み終了時点で優勝者が決まらない場合，4回目の取り組みは $\boxed{ア}$ である．6回目の取り組みで力士Cが優勝する確率は，$p=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキク}}$ をとる．何回かの取り組みを行って力士Aが優勝する確率を α，力士Bが優勝する確率を β とすると $\boxed{ケ}$．

(b) $p=\dfrac{1}{3}$ のとき，3回目の取り組みで力士Cが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$ であり，何回かの取り組みを行って力士Cが優勝する確率は $\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}$ となる．

(c) 3人の力士が優勝する確率が等しくなるのは $p=\dfrac{\boxed{セソ}-\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツテ}}$ のときである．

$\boxed{ア}$ の解答群

① 必ず力士AとBの対戦　② 必ず力士BとCの対戦　③ 必ず力士AとCの対戦
④ 力士Aが参加するが対戦相手は不定　⑤ 力士Bが参加するが対戦相手は不定
⑥ 力士Cが参加するが対戦相手は不定　⑦ どの力士同士の対戦となるか不定

$\boxed{ケ}$ の解答群

① $\alpha<\beta$ が成り立つ　② $\alpha=\beta$ が成り立つ　③ $\alpha>\beta$ が成り立つ
④ $\alpha\leqq\beta$ が成り立つ　⑤ $\alpha\geqq\beta$ が成り立つ　⑥ $\alpha\neq\beta$ が成り立つ
⑦ p の値によって α，β の大小関係が変化する

Ⅱ　座標空間において，点 C(0，0，1)を中心とする半径 1 の球面を S，点 A(1，0，3)から球面 S に引いた接線の接点を P(x, y, z)，接線と xy 平面との交点を Q(X, Y, 0)とする．

(a)　点 P は球面 S 上にあるので $x^2+y^2+\left(z-\boxed{\text{ア}}\right)^2=\boxed{\text{イ}}$ を満たし，

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\boxed{\text{ウ}}$ であるので，次式が成り立つ．

$$x+\boxed{\text{エ}}\,z=\boxed{\text{オ}} \qquad \cdots\cdots\cdots(*)$$

この式は平面を表す．この式が表す平面と球面 S との交線は，

点 $\left(\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}},\ \boxed{\text{ク}},\ \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}\right)$ を中心とする半径 $\dfrac{\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ の円になる．また，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\boxed{\text{セ}} \qquad \cdots\cdots(**)$$

が成り立つ．

(b)　点 Q は直線 AP 上にあるため，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を満たす実数 k が存在するが，式(*)よりこの実数 k は

$$k=\frac{\boxed{\text{ソ}}-X}{\boxed{\text{タ}}}$$

と表されることがわかる．これと式(**)より，点 Q の座標に対して次式が成立する．

$$X^2+\boxed{\text{チ}}\,X+\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}Y^2=\boxed{\text{ト}}$$

この式が表す xy 平面上の楕円の焦点は，原点と点$\left(\boxed{\text{ナニ}},\ \boxed{\text{ヌ}},\ 0\right)$である．

Ⅲ　三角関数の極限に関する以下の問いに答えよ．

(1)　定数 k に対して，極限

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}} \frac{\cos 3\theta + k\cos 2\theta}{4\cos^2\dfrac{\theta}{2} - 3}$$

が有限の値となるのは $k = \boxed{\text{アイ}}$ のときであり，このとき極限値は $\boxed{\text{ウエ}}$ である．

(2)　正の実数 x に対して，下記極限で定義される関数を $f(x)$ とする．

$$f(x) = \lim_{a \to 2} \frac{\cos ax - \cos 2x}{a^2 + a - 6}$$

このとき，関数 $f(x)$ は

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キク}}}\pi,\quad \lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx = \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セソ}}}$$

を満たす．

また，$x > 0$ の範囲で $y = f(x)$ のグラフが直線 $y = ax + b$ と共有点を持たないのは，

$$a > \frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}}\ \text{かつ}\ b > \boxed{\text{ツ}}\ \text{を満たすとき，または}\ a < \frac{\boxed{\text{テト}}}{\boxed{\text{ナ}}}\ \text{かつ}\ b < \boxed{\text{ニ}}$$

を満たすときである．

Ⅳ　座標平面上を運動する点 $P(x,\ y)$ の座標が，時刻 t において

$$x = -\sqrt{3}\,t^2 + 2\sqrt{3}\,t, \qquad y = t^3 - 3t^2 + 2t$$

であり，時刻 t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲で変化したときの点 P の軌跡を曲線 C とする．

(a)　点 P の y 座標は $t = \dfrac{\boxed{ア} - \sqrt{\boxed{イ}}}{\boxed{ウ}}$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{エ}\sqrt{\boxed{オ}}}{\boxed{カ}}$ をとる．また，$0 < t < 1$ のとき，点 P における曲線 C の接線と x 軸とのなす鋭角が $\dfrac{\pi}{6}$ となるのは $t = \dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$ のときである．

(b)　時刻 t における点 P の速さは $\boxed{ケ}\,t^2 - \boxed{コ}\,t + \boxed{サ}$ と表される．また，曲線 C の長さは $\boxed{シ}$ である．

(c)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積は $\dfrac{\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}}{\boxed{ソタ}}$ である．