

※学士は設問【1】は必須、
【2】又は【3】はどちらか
選択

試験時間 80 分

- 注意事項
1. 数学(選抜)の問題は 3 枚である。3 枚とも解答すること。
 2. 3 枚とも受験番号と氏名の記入を忘れないこと。
 3. 【2】、【3】は、解答の過程を必ず記すこと。

【1】 つぎの にあてはまる答を下の解答欄に記せ。

(1) 関数 $y = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$ …① の導関数は $y' =$ (ア), ① のグラフの変曲点の座標は (イ), ① の値域を不等式で表わすと (ウ) である。また、この関数①の逆関数は $y =$ (エ) である。

(2) n が $4 \leq n \leq 9$ を満たす自然数のとき、4 個の数字 1, 2, 3, n を用いて 4 桁の整数をつくる。

(i) $n = 5$ のとき、3000 より小さい数は全部で (オ) 個できる。

(ii) 1 つの n に対して、1, 2, 3, n からつくられる 4 桁の整数のうち、2000 より小さい数の総和を S_n とするとき、 S_n を n を用いて表わすと、 $S_n =$ (カ) である。 $S_n = 8442$ となるときの n の値は (キ) である。

(3) 平面上に 2 点 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ があり、点 P は曲線 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上の点である。

(i) 2 つのベクトル \vec{OA} と \vec{AP} が直交するとき、点 P の座標は (ク) である。

(ii) 内積 $t = \vec{OA} \cdot \vec{OP}$ のとり得る値の範囲を不等式で表わすと (ケ) である。

(iii) 3 点 O, A, P が一直線上にないとき、三角形 OAP の面積の最大値は (コ) である。

(4) 等式 $\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+2}$ が x についての恒等式であるとき、定数 A, B, C の値は $A =$ (サ), $B =$ (シ), $C =$ (ス) であり、定積分 $\int_2^1 \frac{dx}{(x-1)^2(x+2)}$ の値は (セ) である。

【2】 k は $k \neq 1$ を満たす実数とし、行列 A, E を

$$A = \begin{pmatrix} 3k+1 & 2-5k \\ k-9 & 2k+4 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。 A が逆行列をもたないとき、以下の問に答えよ。

(1) k の値を求めよ。

答

(2) $(E+A)^2 = E + a_2 A$ を満たす実数 a_2 を求めよ。

答

(3) n は自然数とする。 $(E+A)^n$ を実数 a_n を用いて $(E+A)^n = E + a_n A$ と表わすとき、 a_{n+1} を a_n を用いて表わせ。また、 a_n を n を用いて表わせ。

答

【3】 曲線 $C_1: y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) と放物線 $C_2: y = -x^2 + 1$ について、以下の問に答えよ。

(1) C_1 上の点 $A(a, \frac{1}{a})$ を通る放物線 C_2 の 2 本の接線が直交するとき、点 A の座標を求めよ。

答

(2) C_1 上の点 $P(p, \frac{1}{p})$ における C_1 の接線 l_1 の方程式を求めよ。また、 l_1 と同じ傾きをもつ C_2 の接線 l_2 の方程式を求めよ。

答 $l_1: y =$ _____, $l_2: y =$ _____

(3) 2 つの曲線 C_1 と C_2 は共通な接線を 2 本もつことを示せ。