2016年度入学試験問題(前期)

数　　学(問　題)

注　意

1)　数学の問題冊子は4ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。

2)　別に解答用紙1枚があり，**解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。**
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。**
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I　(1)~(6)の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1)　次の式を因数分解せよ。

$$x(x+9)(x-4)(x-13)+2016=\boxed{\text{ア}}$$

(2)　5つの選択肢の中から正解2つを解答する問題があり，2つの正解をどちらも正しく選んだ場合にのみ得点が与えられる。次の(i)，(ii)において，与えられた条件以外は無作為に解答を選ぶとき，得点が得られる確率を求めよ。

(i)　2つの選択肢が誤っていることがわかっている場合 $\boxed{\text{イ}}$

(ii)　1つの選択肢が正解であることがわかっている場合 $\boxed{\text{ウ}}$

(3)　三角形ABCの辺AB上に $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点Pを，辺BCの延長上に $2\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を満たす点Qをとる。ACとPQの交点Rについて，線分BRを $r:1$ に外分する点がAQ上に存在するとき，r の値は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で定義される関数 $y=4\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)$ の値域は，$\boxed{\text{オ}}$ である。

(5)　次の2つの式の値を求め，$\boxed{\text{カ}}$ の指定欄にそれぞれ記入せよ。また，中央にはこれらの値の大小を評価して不等号記号を記入せよ。

$$A:\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}+\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}},\quad B:\log_3\frac{2}{3}+4\log_4\sqrt[4]{1024}-\frac{1}{2}\log_3 12$$

(6)　xy 平面上で，不等式 $|x+1|+|y|<2$ を満たす範囲をA，不等式 $|x-1|+|y|<2$ を満たす範囲を B とする。さらに，$|x|<4$ かつ $|y|<4$ を満たす範囲を C とするとき，$\overline{A\cup B}\cap C$ を満たす範囲を $\boxed{\text{キ}}$ に図示せよ。ただし，条件を満たす領域を斜線で明示することとし，境界上の点を含むときは実線を，境界上の点を含まないときは点線を用いて表記すること。

II　a，m，kを正の定数とするとき，関数$f(x)$は次の条件を満たす関数である。

(i)　原点を通り，原点における接線の傾きがmである。

(ii)　$x=a$における接線の傾きがmであり，この接線のy軸切片がkである。

(1)　$f(x)$の満たす条件を，a，m，kを用いた数式で表すと次のようになる。

(i)　$f(0)=$ $\boxed{\text{ク}}$，$f'(0)=$ $\boxed{\text{ケ}}$

(ii)　$f(a)=$ $\boxed{\text{コ}}$，$f'(a)=$ $\boxed{\text{サ}}$

(2)　$f(x)$が(i)，(ii)の条件を満たす，最も次数の低い多項式である時，この多項式をa，m，kを用いて表すと，$f(x)=$ $\boxed{\text{シ}}$ となる。

(3)　nを正の定数とするとき，$y=f'(x)$と直線$y=n$とは，$0<x<a$の範囲において，nが $\boxed{\text{ス}}$ の範囲で交点を持つ。nがこの範囲の値をとるとき，交点のx座標の中で最も小さい値をαとし，$y=f'(x)$，直線$y=n$，y軸および直線$x=\alpha$で囲まれた部分の面積$S(\alpha)$をa，k，αを用いて表すと$S(\alpha)=$ $\boxed{\text{セ}}$ となる。

(4)　$S(\alpha)$はαが $\boxed{\text{ソ}}$ のときに，最小値 $\boxed{\text{タ}}$ をとる。

III　複素数の数列$\{z_n\}$について，次の条件によって定義する。

$z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$，$z_{n+1} = \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,i\right) z_n$　ただし，nは自然数とする。

(1)　複素数を$r(\cos\theta + i\sin\theta)$の極形式で表現すると，$z_2 = \boxed{\text{チ}}$であり，$z_3 = \boxed{\text{ツ}}$である。

(2)　z_nの一般項をnを用いた極形式で表すと，$z_n = \boxed{\text{テ}}$となる。

(3)　$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |z_i| = \boxed{\text{ト}}$である。

(4)　z_{3n}の一般項が$\boxed{\text{ナ}}$であることを利用すると，

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{3i} = \boxed{\text{ニ}}$が成り立つ。

Ⅳ xy 平面上に，曲線 $C : x^2-(y-1)^2=1$，直線 $l_1 : y=ax$，直線 $l_2 : y=bx$ をとる。直線 l_1，直線 l_2 はどちらも曲線 C とそれぞれ2つの交点を持つとき，次の問に答えよ。

(1) 曲線 C と直線 l_1 との2つの交点の x 座標がどちらも正である場合，a のとり得る範囲は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

(2) a が上記の条件を満たすとき，曲線 C と直線 l_1 との交点をP，Qとする。原点Oと2つの交点との距離OPとOQについて，OP・OQを a を用いて表すと $\boxed{\text{ネ}}$ となる。

(3) 曲線 C と直線 l_2 との2つの交点の x 座標がどちらも負であるとき，この2つの交点をR，Sとおく。P，Q，R，Sの4つの点が同一円周上にあるとき，a と b との関係は $\boxed{\text{ノ}}$ である。

(4) この円を，a を用いた xy 平面上の方程式で書き表すと $\boxed{\text{ハ}}$ となる。