平成26年度入学試験問題（後期）

数　　学

注　　意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机上に出しておくこと。

数　学（後　期）

〔1〕 半径1で周上に定点Pを持つ円Cがx軸と接しながら滑らずに回転する。円Cの中心Dが点$(0, 1)$にありPが原点にある状態から始めて，回転とともに中心Dのx座標が増加する。Dの座標が$(\theta, 1)$であるときのPの座標を$(x(\theta), y(\theta))$とおく。

(1) $x(\theta)$，$y(\theta)$をそれぞれθを用いて表せ。

(2) $0 < a < \frac{\pi}{2}$，$b - a = \frac{\pi}{2}$として，$x(b) - x(a) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{5}$であるとき，$y(b) - y(a)$を求めよ。

〔2〕 △ABCの辺BC，CA，ABの各中点をA_1，B_1，C_1とする。これらの中点以外の点Pをとり，3本の直線l_A，l_B，l_Cをそれぞれ，l_Aは直線PA_1に平行で頂点Aを通る直線，l_Bは直線PB_1に平行で頂点Bを通る直線，l_Cは直線PC_1に平行で頂点Cを通る直線とする。

(1) 3直線l_A，l_B，l_Cは1点で交わることを示せ。

(2) (1)の交点をQとする。点Pの位置にかかわらず，直線PQは定点を通ることを示せ。その定点の直線PQ上における位置を述べよ。

〔3〕 曲線$y = \frac{x^2}{8}$上のx座標がa，b，c $(a < b < c)$である3点を接点として，それぞれ接線l_a，l_b，l_cを引く。l_aとl_bの交点をQ，l_bとl_cの交点をRとする。

(1) 点Qの座標をa，bを用いて表せ。また，点Rの座標をb，cを用いて表せ。さらに線分QRの長さをa，b，cを用いて表せ。

(2) $-3 < a$，$c < 9$とし，l_aは点$P(-3, 1)$を通り，l_cは点$S(9, 10)$を通るとする。このとき，a，cを求めよ。

(3) (2)のP，S，a，cに対して，bが$a < b < c$をみたしながら変化するとき，3つの線分の長さの和PQ + QR + RSの最小値を求めよ。

〔4〕 媒介変数sを用いて$x = e^s + s - 1$，$y = e^s + s^2$ $(0 \leqq s \leqq 1)$と表される曲線をKとよび，曲線K，直線$x = e$，x軸，y軸で囲まれる部分を図形Gとよぶ。なお，eは自然対数の底である。

(1) 不定積分について$\int (px^2 + qx + r)e^x\,dx = (kx^2 + lx + m)e^x + C$（$C$は定数）となることを示し，定数$k$，$l$，$m$をそれぞれ定数$p$，$q$，$r$を用いて表せ。

(2) 図形Gの面積を求めよ。

〔5〕 1から10までの番号をつけた10個の球が一つの袋に入っている。$1 \leqq n \leqq 10$のそれぞれの整数nに対して，つぎのような操作を考える：

　袋の中をよくかき混ぜてから袋から球を1個取り出し，その球に記されている数をXとする。$X \leqq n$ならその球を袋にもどし$X > n$ならもどさないで，もう一度よくかき混ぜてから球を1個取り出し，その球に記されている数をY_nとする。

このように定めた確率変数Y_nの期待値(平均)を$E(Y_n)$と書く。$1 \leqq i \leqq 10$，$1 \leqq k \leqq 10$に対して，$X = i$かつ$Y_n = k$となる確率を$P(X = i, Y_n = k)$と表す。同様に，$Y_n = k$となる確率を$P(Y_n = k)$と表す。

(1) つぎの3つの場合に，それぞれ$P(X = i, Y_n = k)$を求めよ：

$1 \leqq i \leqq n$のとき，$i > n$かつ$k \neq i$のとき，$i > n$かつ$k = i$のとき

(2) $k \leqq n$と$k > n$の2つの場合に，それぞれ$P(Y_n = k)$を求めよ。

(3) $E(Y_n)$を求めよ。

(4) 10個の$E(Y_n)$のうち最小であるのはどれか。またその最小値も求めよ。