

大阪医科大学

平成 25 年度 入学 試験 問題 (後期)

数 学

注 意

1. 合図があるまで表紙をあけないこと。
2. 問題右頁とその裏は計算に使用する。
3. 受験票は机に出しておくこと。

数 学 (後 期)

[1] xy 平面に 3 点 $A(0, 1)$, $B(0, -1)$, $C(-1, 0)$ をとる。実数 t に対して、直線 AC 上を動く点 $P\left(\frac{-(t+1)}{2}, \frac{1-t}{2}\right)$ と、直線 BC 上を動く点 $Q\left(\frac{t-1}{2}, \frac{-(t+1)}{2}\right)$ がある。

- (1) 直線 AQ , BP の方程式を t を用いて表せ。
- (2) この 2 直線の交点 R を求めよ。
- (3) (2) の点 R が描く曲線の方程式を導け。
- (4) $t \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$ のそれぞれに対して、(2) の点 R はどんな点に近づくか。

[2] 1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ の辺 OA , OB 上にそれぞれ点 P , Q を $OP = t$, $OQ = t$ ($0 < t < 1$) となるようにとる。 P と Q を四面体 $OABC$ の表面に沿い $\triangle OAB$ の内部を通らない折れ線 l で結ぶ。

- (1) 四面体 $OABC$ の表面を辺 OA , OB , OC に沿って切り開いたときの展開図から面 OAB を除いた図を描け。なお、図の各頂点には、対応する四面体の頂点 O , A , B , C の記号をつけよ。
- (2) l が辺 AC , BC と交わるとの条件の下で、 l の長さの最小値を t を用いて表せ。
- (3) l の長さの最小値を t を用いて表せ。

[3] a, b, c は $bc \neq 0$ をみたす実数とする。行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ を用いた $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ により平面上の点 (x, y) を

点 (x', y') に移す 1 次変換が直線 l をまた直線 l に移すとき、 l を A 不変な直線とよぶ。

- (1) 原点を通らない直線で A 不変なものが存在するとき、 a, b, c のみたす条件を求めよ。
- (2) a, b, c が(1)の条件をみたすとき、原点を通る直線で A 不変なものをすべて求め、直線の方程式を b, c で表せ。

[4] $0 < x < 3$ の範囲で、 $f(x) = \log \frac{1}{x+3} + \log \frac{1}{x} + \log \frac{1}{3-x}$ とおく。曲線 $y = f(x)$ を C と表す。

(1) $f(x)$ が極値をとるときの x の値と、極限 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3-0} f(x)$ を調べて、曲線 C の概形を描け。

a, b を $0 < a < b < 3$, $f(a) = f(b)$ の条件をみたすようにとり、2 点 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ のそれぞれにおける曲線 C の接線の交点の x 座標を c とする。

- (2) 条件 $f(a) = f(b)$ から導かれる a, b のみたす関係式を、できるだけ簡単な形で求めよ。
- (3) a, b が(2)の関係式をみたしながら動くとき、 c の値の範囲を求めよ。

[5] 数直線の原点に置いた石に対して、下記の操作 A をつぎつぎに行う。

操作 A : 石が原点にあるときには 2 枚の硬貨を投げて、表が 2 枚なら石を $+2$ 移動させ、裏が 2 枚なら石を -2 移動させ、表、裏 1 枚ずつなら石は移動させない。石が原点以外の整数点にあるときには 1 枚の硬貨を投げて、表なら石を $+1$ 移動させ、裏なら石を -1 移動させる。

硬貨を投げる時、表、裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とする。 n を自然数とし、操作 A を n 回行った後に石のある点の座標を X_n とおく。

- (1) $X_n = n + 1$ となる確率を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ であるとき、 $X_n = n$ となる確率を求めよ。
- (3) $n \geq 3$ であるとき、 $X_n = n - 1$ となる確率を求めよ。