

数 学

1. 監督者の指示があるまで開いてはいけない。
2. 解答は別紙の解答用紙に記入しなさい。
3. 問題用紙は各科目の試験終了後持ち帰ってもよい。
ただし、試験途中では持ち出してはいけない。

1. 次の にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ。

- (1) 数直線上を動く点 P が原点の位置にある。2 個のさいころを同時に投げる試行を T とし、試行 T の結果によって、P は次の規則で動く。

(規則) 2 個のさいころの出た目の積が偶数ならば +2 だけ移動し、奇数ならば +1 だけ移動する。

試行 T を n 回繰り返し行ったときの P の座標を x_n とすると、 $x_1 = 2$ となる確率は (ア) であり、 $x_3 = 3$ かつ $x_4 = 5$ となる確率は (イ) である。また、P が座標 4 以上の点に初めて到達するまで試行 T を繰り返し行うとき、試行回数の期待値は (ウ) である。

- (2) 平面上に 3 点 O, A, B があり、 $|\vec{OA}| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = |2\vec{OA} + \vec{OB}| = 1$ をみたしている。このとき、 $|\vec{OB}| =$ (エ) である。また、実数 s, t が条件 $1 \leq s+3t \leq 3, s \geq 0, t \geq 0$ をみたしながら動くとき、 $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は (オ) である。

2. xy 平面上に 2 曲線

$$C_1 : y = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad C_2 : y = \sqrt{1-x^2}$$

がある。 C_1, C_2 上に 2 点 $P_1(t, 2t\sqrt{1-t^2}), P_2(t, \sqrt{1-t^2})$ ($-1 < t < 1$) をとり、 P_1 における C_1 の接線 l_t と、 P_2 における C_2 の接線 m_t について考える。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) C_1 および C_2 の概形を同じ xy 平面上に描け (xy 平面は解答用紙にある)。ただし、曲線の凹凸と変曲点は調べなくてよい。また、 P_1 と P_2 が一致するときの t の値を求めよ。
- (2) 2 直線 l_t と m_t が平行になるときの t がみたすべき条件を、 t についての 2 次方程式で表し、その解 α, β ($\alpha < \beta$) を求めよ。
- (3) l_t と m_t が交点をもつとき、その交点の y 座標を y_t とする。
 - (i) y_t を t を用いて表せ。
 - (ii) $y_t > 0$ となる t の値の範囲を (2) で求めた α, β を用いて表し、この範囲における y_t の最小値を求めよ。

3. θ は $0 \leq \theta \leq \pi$ をみたす実数とする。 xyz 空間内の平面 $z = 0$ 上に 2 点 $P_\theta(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $Q_\theta(2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 0)$ をとり, θ を $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲で動かすとき, 線分 $P_\theta Q_\theta$ が通過する部分を D とする。空間内の $z \geq 0$ の部分において, 底面が D , $P_\theta Q_\theta$ 上の各点での高さが $\frac{2}{\pi}\theta$ の立体 K を考える。半球 $B: x^2 + y^2 + z^2 \leq 2^2, z \geq 0$ と K の共通部分を L とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) B を平面 $z = t$ ($0 \leq t < 2$) で切った切り口の円の半径を t を用いて表せ。
- (2) L の体積を求めよ。

4. a, d は $ad \neq 0$ をみたす実数とする。O を原点とする座標平面上において、行列 $A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ の表す1次変換(移動)を f とし、以下の2つの条件をみたす直線 l がただ1つ存在するときを考える。

(i) l は O を通る

(ii) f によって、 l 上の点はすべて l と垂直に交わるある直線 m 上に移される

このとき、次の問いに答えよ。

(1) a と d の関係式を求めよ。

(2) $d > 0$ とする。 l 上に O からの距離が1で x 座標が正となる点 P をとり、P の f による像を Q とする。線分 OQ の長さを求めよ。また、直線 PQ と y 軸が交わる点を R とするとき、線分 OR の長さが最小となるように a と d の値を定めよ。