数　　学

1 ～ 5 ページ

注　意

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子を開いてはいけません.
2. 試験開始後，ただちにページ数を確認し，落丁や印刷の不鮮明なものなどがあれば申し出なさい.
3. 解答は，別に配られる解答用紙の所定の場所に記入しなさい.
4. 解答時間は75分間です.
5. 受験番号を，解答用紙の所定欄に記入しなさい.
6. 試験終了後，解答用紙のみを提出しなさい. 問題冊子は持ち帰りなさい.

1　以下の設問(1)～(8)については，答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　mを定数とする．2次関数 $y=x^2-2mx+5m+6$ のグラフとx軸の負の部分が異なる2点で交わるとき，定数mのとり得る値の範囲を求めなさい．

(2)　放物線 $y=x^2-x+2$ を x軸方向に$\dfrac{1}{2}$，y軸方向に$-\dfrac{1}{2}$だけ平行移動して得られる放物線と直線 $y=x$ の共有点の座標を求めなさい．

(3)　赤玉5個と白玉4個，合計9個の玉が入っている袋から4個の玉を同時に取り出すとき，赤玉が2個，かつ，白玉が2個である確率を求めなさい．

(4)　座標平面上に3点A$(-2,\ 3)$，B$(1,\ 4)$，C$(5,\ 6)$をとり，線分ABと線分BCを引く．ABの垂直2等分線をl，BCの垂直2等分線をmとするとき，lとmの交点の座標を求めなさい．

(5)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{3a_n+1}$，$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定められる数列$\{a_n\}$の一般項を求めなさい．

(6)　$\left(\dfrac{1}{6}\right)^{150}$を小数で表したとき，小数第何位に初めて0でない数字が現れるか．ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$とする．

(7)　原点Oの座標平面上に2点A$(4,\ -3)$，B$(2,\ 5)$をとり，三角形OABを作る．辺OAを2:1に内分する点をC，辺OBを3:2に内分する点をDとする．線分BCと線分ADを引き，その2つの線分の交点をEとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を求めなさい．答えは，成分で表しなさい．

(8)　2次行列$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$と自然数$n$に対して$A$の$n$乗$A^n$を考える．$\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$とおくとき，$(x_n)^2+(y_n)^2$を$n$を用いた式で表しなさい．

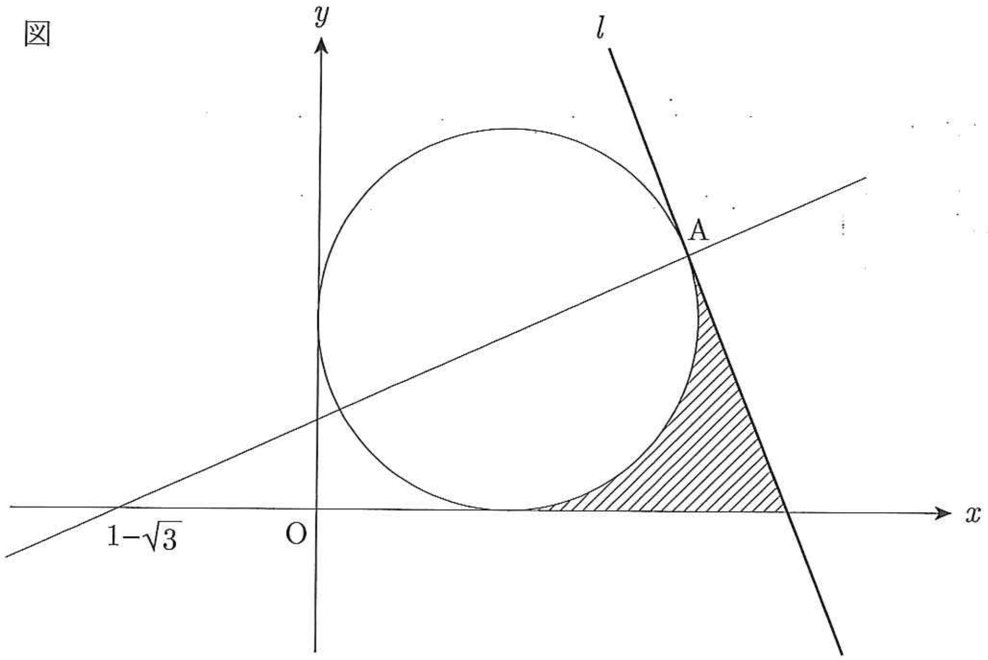
2　原点Oの座標平面上に円C: $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ を描き，2点$(1-\sqrt{3},\ 0)$，$(1,\ 1)$ を通る直線と円Cの交点のうち，x座標が1より大きいほうの点をAとする（図を参照）．また，点Aにおける円Cの接線を l とする．以下の問いに答えなさい．ただし，⑴，⑵については答えだけを解答欄に書きなさい．

⑴　l の方程式を求めなさい．

⑵　図の斜線部分の面積を求めなさい．

⑶　l と x 軸の両方に接して，かつ，円Cと外接する円のうち，半径が円Cの半径よりも小さいものを円 C_1 とする．以下同様に，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して，l と x 軸の両方に接して，かつ，円 C_n と外接する円のうち，半径が円 C_n の半径よりも小さいものを円 C_{n+1} とする．いま，円 C_n の面積を S_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で表すとき，無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ を求めなさい．

図



3　平行六面体 ABCD-EFGH は，$AB = 2$，$AD = 3$，$AE = 1$，$\angle BAD = 60^\circ$，$\angle BAE = 90^\circ$，$\angle DAE = 90^\circ$ をすべて満たしている．辺 FG を $1:2$ に内分する点を J とし，3 点 E，B，J を頂点とする三角形 EBJ を作るとき，以下の問いに答えなさい．ただし，(1)，(3) については答えだけを解答欄に書きなさい．

(1)　三角形 EBJ の面積を求めなさい．

(2)　三角形 EBJ の面と線分 FD の交点を K とする．$\overrightarrow{EK}$ を $\overrightarrow{EB}$ と $\overrightarrow{EJ}$ を用いて表しなさい．

(3)　(2) の線分 EK の延長と線分 BJ との交点を L とする．4 点 K，F，B，L を頂点とする四面体 KFBL の体積を求めなさい．

4 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ に対して $I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$ を考える．以下の問いに答えなさい．

(1) I_1 を求めなさい．さらに，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めなさい．

(2) I_n-I_{n+2} を n の分数式で表しなさい．さらに，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(4n-1)(4n+1)}$ を求めなさい．