

2013 年 度 入 学 試 験 問 題

数 学 (問 題)

注 意

- 1) 数学の問題冊子は4ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。
- 2) 別に解答用紙1枚があり，解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。
- 3) 解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。
- 4) 問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。
- 5) 途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

I (1)~(6)の の中に、あてはまる数、角度、整式、不等式、記号、語句などを記入せよ。

(1) α, β が $\alpha + \beta = 3, \alpha\beta = 1$ を満たすとき、 $\alpha^3 + \beta^3 =$ ア ,
 $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} =$ イ , $|\alpha - \beta| =$ ウ である。ただし、記号 $|a|$ は実数 a の絶対値を表す。

(2) 次の式を因数分解せよ。

(i) $9x^2 - 30xy - 24y^2 =$ エ (ii) $(x + y)^3 - (x - y)^3 =$ オ

(3) 方程式 $8^x - 2^{2x+1} - 2^x + 2 = 0$ のすべての解を カ に記せ。

(4) $x + 2y = 4, x \geq 0, y \geq 0$ とする。このとき関数 $\log_{\frac{1}{2}}(6xy + 4y^2 + 1)$ は、
 $x =$ キ において最大値 ク をとり、 $x =$ ケ において最小値 コ をとる。

(5) 座標平面において、動点 $P(x, y)$ が 2 点 $A(0, 0), B(0, 3)$ からの距離の比を $2 : 1$ に保ちながら動くときの軌跡を C とする ($PA : PB = 2 : 1$)。曲線 C の方程式は サ である。また、第 1 象限において、直線 $y = mx$ と曲線 C とが接するとき、 $m =$ シ となる。

(6) 白玉 4 個、赤玉 4 個、青玉 4 個の計 12 個の玉が入っている袋から、よくかき混ぜて、同時に 3 個の玉を取り出す。このとき、

(i) 取り出した 3 個がすべて同じ色である確率は ス である。

(ii) 取り出した 3 個のうち 2 個が同じ色で、他の 1 個が異なる色である確率は セ である。

II $0 \leq \theta \leq \pi$ とし, 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 \cos \theta & \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta \\ -\sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta & -\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta \end{pmatrix}$ を考

える。以下, A^{-1} は A の逆行列を表すものとし, $n = 1, 2, 3, \dots$ とする。

(1) A^{-1} を に記入せよ。

(2) $(A + A^{-1})^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とおく。 d_n を に記入せよ。

(3) 無限級数 $d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_n + \dots$ が収束するような θ の値の範囲を に記入し, そのときの無限級数の和を に記入せよ。

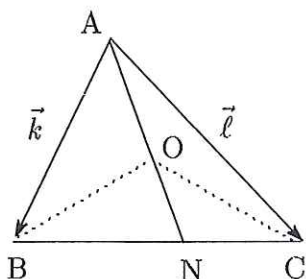
III $x > 0$ で定義された関数 $g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot \log x$ を考える。ただし、対数は自然対数とする。

(1) $g(x)$ は $x = x_A$ において極大値をとる。 x_A の値を に記入し、 $g(x)$ の極大値を に記入せよ。

(2) 座標平面上の曲線 $y = g(x)$ は1つの変曲点 $(x_B, g(x_B))$ をもつ。 x_B の値を に記入せよ。

(3) 定積分 $\int_{x_A}^{x_B} g(x) dx$ の値を に記入せよ。

IV $\triangle ABC$ において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{k}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{\ell}$ とする。ベクトルの大きさについて、 $|\vec{k}| = 2$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{3} + 1$, $|\sqrt{3}\vec{k} - \vec{\ell}| = \sqrt{10}$ が成り立っている。このとき、 $\triangle ABC$ の外心を O として、以下の問いに答えよ。



- (1) 内積 $\vec{k} \cdot \vec{\ell}$ の値を に記入し、 $\angle BAC$ の大きさを に記入せよ。
- (2) 辺 BC の長さを に記入し、 $\angle ACB$ の大きさを に記入せよ。
- (3) 直線 AO と辺 BC との交点を N とする。ベクトル \overrightarrow{AN} を \vec{k} , $\vec{\ell}$ を用いて表した式を に記せ。