数 学（後 期）

〔1〕 初項をそれぞれa_1, b_1 ($0 < a_1 < b_1$) とする数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, \cdots$) を，$n \geqq 2$のときは以下の式で定める：

$$a_n = \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}},\quad b_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$$

(1) $n \geqq 2$のとき，積a_nb_nをa_1, b_1を用いて表せ。

(2) $n \geqq 2$のとき，$a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1}$を示せ。

(3) $n \geqq 2$のとき，$b_n - a_n < \dfrac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1})$を示せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a_1b_1$を示せ。

〔2〕 四面体OABCは，各面が互いに合同な三角形である。△ABCの辺の長さをBC $= a$, CA $= b$, AB $= c$として，a, b, cは互いに異なるとする。辺OA, OB, OCの中点をそれぞれA_1, B_1, C_1, 辺BC, CA, ABの中点をそれぞれL, M, Nとする。

(1) △OABの2辺OA, OBの長さをそれぞれa, b, cで表せ。

(2) 3本の直線LA_1, MB_1, NC_1は一点で交わることを示せ。

(3) 3本の直線LA_1, MB_1, NC_1は互いに直交することを示せ。

〔3〕 aを実数の定数として，$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6a(1-a)x + 4a(1-a)^2$とおく。

(1) xの関数$f(x)$の極値を求めよ。

(2) 3次方程式$f(x) = 0$が異なる3つの実数解を持つためのaの条件を求めよ。

〔4〕 極座標で$r = \cos 2\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ と表される曲線Cを考える。

(1) θに対応するC上の点の直交座標x, yを，θを媒介変数として表せ。

(2) $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < 0$または$0 < \theta < \dfrac{\pi}{4}$の範囲の$\theta$に対応する点における$C$の接線の傾きを$T(\theta)$として，$\displaystyle\lim_{\theta\to-\frac{\pi}{4}+0} T(\theta)$と$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0} T(\theta)$を求めよ。

(3) 曲線Cの概形を描け。

(4) 曲線Cが囲む図形の面積を求めよ。

〔5〕 1から5までの5枚の番号札がある。その5枚を次のようにA, Bの2つの箱に分ける：

1は箱A，2は箱B，残りの番号札はそれぞれ硬貨投げを行って，表なら箱A，裏なら箱Bに入れる。

次に，番号札をそれぞれよくかき混ぜ，2つの箱から1枚ずつ札を取り出す。

(1) 1が取り出される確率を求めよ。

(2) 1が取り出されたとき，2が取り出される条件つき確率を求めよ。