$\boxed{1}$ 次の(1)から(5)までの各問いに答えよ。最終的な解答は<u>答の欄</u>に記入すること［配点 70 点］。

(1) $x^2+x+1=0$ の相異なる解を α,β とするとき，

$\alpha^{-2015}+\alpha^{-2014}+\cdots+\alpha^{-2}+\alpha^{-1}+1+\beta+\beta^2+\cdots+\beta^{2014}+\beta^{2015}$ の値を求めよ［10 点］。

(2) 実数全体で定義された関数 $f(x)$ が，次の３つの条件（i），（ii），（iii）をすべて満たしている。関数 $f(x)$ を求めよ［15 点］。

（i）すべての実数 x について微分可能で，$f'(0)=1$ である。

（ii）すべての実数 x について，$f(x)>0$である。

（iii）すべての実数 x，y について，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

1 (続き)

(3) 数列 1, 1, 2, 1, 1, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 1, 2, ……の第 n 項を a_n とする［15 点］。

① 初めて，$a_n=7$ となる n を求めよ。

② 初めて，$a_n=m$ となる n を l とするとき，$\sum_{k=1}^{l} a_k$ を求めよ。

(4) m, n は $m \geqq n$ を満たす自然数とする［15 点］。

① $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{8}$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。

② p を 3 以上の素数，t を自然数とするとき，$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{p^t}$ を満たす自然数の組 $(m,\ n)$ を p, t を用いて表せ。

1 （続き）

(5) c を定数とし，3 次方程式 $2x^3+7x^2+4x+c=0$ は，相異なる 3 個の実数解を持つとする［15 点］。

① 定数 c の値の範囲を求めよ。

② 異なる 3 つの解を α, β, γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ として，β が$\beta<-1$ を満たすとき，c の値の範囲と解 α, γ の値の範囲をそれぞれ求めよ。

2 点 O を原点とする座標空間に，4 点 A$(-2,\ 3,\ 1)$, B$(-1, -1, -2)$, C$(1,\ 1,\ 1)$, P$(3,\ a,\ 0)$ がある。次の各問いに答えよ［配点 40 点］。

(1) 点 A から直線 OB に引いた垂線と直線 OBとの交点を G とするとき，線分 OG の長さを求めよ。

(2) 点 C から平面 OAB に引いた垂線と平面 OABとの交点を H とするとき，線分 CH の長さと四面体 OABC の体積をそれぞれ求めよ。

(3) 四面体 OABC の外接球の中心と半径をそれぞれ求めよ。

(4) 四面体 OABP の体積が，四面体 OABC の体積の半分となるとき，定数 a の値を求めよ。

3 1 から m までの m $(m \geqq 2)$ 個の自然数からなる順列 $a_1, \cdots, a_m$ を考える。
$a_i \neq i$ $(i = 1, \cdots, m)$ を満たす順列の個数を N_m で表す。次の各問いに答えよ［配点 40 点］。

(1) N_2，N_3，N_4，N_5 をそれぞれ求めよ。

(2) $m \geqq 4$ のとき，N_m を N_{m-1}，N_{m-2} を用いて表せ。

(3) $\dfrac{N_m}{m!}$ を m を用いて表せ。