物　理　(その１)

第１問

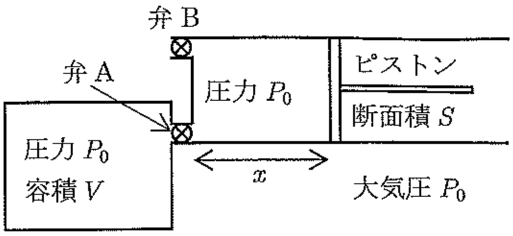
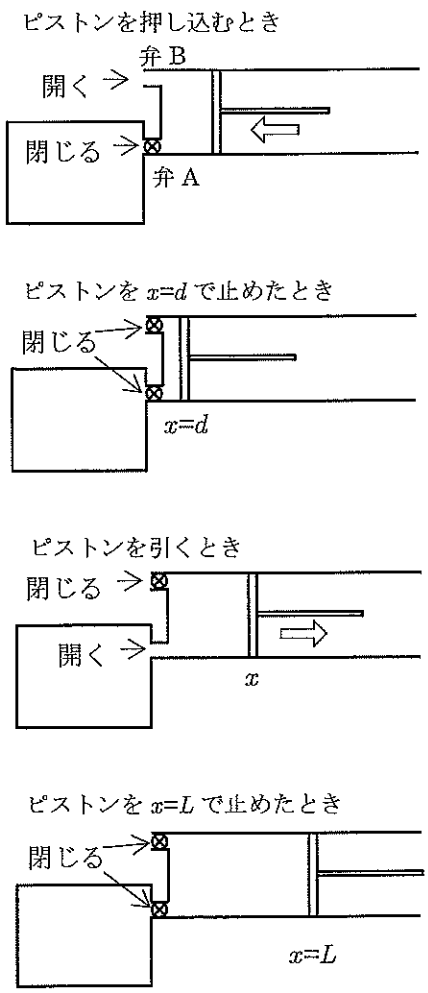


図１：最初の状態

ピストンがついたシリンダーの端に２つの弁AとBがあり、弁Aを介して容積 V の容器とつながっている(図１)。また、弁Bを開くとシリンダー内の圧力が大気圧 P_0 と等しくなる。シリンダーの端からピストンまでの距離を x とし、$x=0$ のときシリンダー内の容積がゼロになるとする。また、シリンダーの断面積を S とし、全体は一定の温度に保たれているものとする。

はじめに、シリンダー内と容器内の圧力を大気圧 P_0 と等しくして、弁Aと弁Bを閉じる（図１)。以降、ピストンを往復させて、この往復の折り返し時点で弁を開閉しながら、次の **(ステップ１) から (ステップ４)** よりなる一連の操作を順に繰り返す場合を考える（図２)。

図２：操作中の弁の開閉の様子



(ステップ１) 弁Aを閉じたまま、弁Bを開いて、ピストンを $x=d$ まで押し込む。(ただし $0 \leqq d < L$ である。)

(ステップ２) ピストンを $x=d$ で止めて、弁Bを閉じる。(弁Aと弁Bを閉じた状態。)

(ステップ３) 弁Aだけ開いて、ピストンを $x=L$ まで引いて止める。

(ステップ４) ピストンを $x=L$ で止めたまま、弁Aを閉じる。(弁Aと弁Bを閉じた状態。)

まず、$d=0$ の場合を考える。

問１　最初の状態（図１）から、上記の一連の操作を１回行った後の容器内の圧力はいくらになるか。

問２　最初の状態（図１）から、上記の一連の操作を k 回繰り返した後の容器内の圧力はいくらか。

問３　例えば、$V=100LS$ のとき、容器内の圧力がはじめて $0.9P_0$ 未満になるのは一連の操作を何回繰り返した後か、整数値で答えよ。必要であれば近似式 $(1+\alpha)^m \fallingdotseq 1+m\alpha$ $(|\alpha| \ll 1)$ を用いてよい。

物　理　（その２）

次に、少し現実に近い状況を考えてみよう。現実には、ピストンを押し込んでシリンダー内の容積を完全にゼロにすることは困難であり、多少はシリンダー内の容積が残る。この事は、本問において、$x=0$ までピストンを押し込むのは困難であり、$x=d$ $(0<d<L)$ までしか押し込められないことに対応する。そこで、上記の**（ステップ１）**と**（ステップ２）**において、$d>0$ として以下の問に答えよ。

問４　最初の状態（図１）から、上記の一連の操作を１回行った後の容器内の圧力を P_0、V、L、S、d を用いて表せ。

問５　最初の状態（図１）から、上記の一連の操作を k 回繰り返した後の容器内の圧力を P_k として、一連の操作をもう１回行った後の容器内の圧力 P_{k+1} を P_k、P_0、V、L、S、d を用いて表せ。

問６　P_k を P_0、V、L、S、d、k を用いて表せ。

物　理　(その3)

第2問

表面が滑らかな半径 R の半球状の物体に質量 m の質点をのせる。物体の底面の中心 O を通る鉛直線と物体表面との交点を点 P とする。図 1 のように中心 O と質点を結ぶ線が、直線 OP となす角度を θ と定め、時計回りを正とする $(-\pi/2<\theta<\pi/2)$。重力加速度の大きさを g として問に答えよ。答えには根号を残して良い。ただし、空気抵抗は無視でき、質点は紙面内のみを動くものとする。

[A]　水平な床の上に物体を固定し、点 P $(\theta=0)$ に質点を置いて静かに手を放すと、質点は初速度 0 で滑り始め、物体表面の点 A で物体から離れた。$\angle \mathrm{POA}=\theta_0$ (>0) とする。

問1　$\cos\theta_0$ の値を求めよ。

問2　R と g を用いて点 A での質点の速さを求めよ。

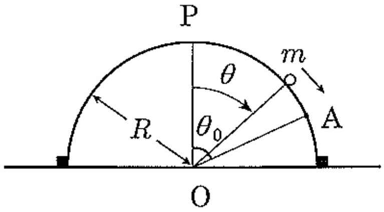


図 1

[B]　次に、[A]で定めた θ_0 だけ水平面から傾いた、十分に長い斜面上に物体を固定し、点 P $(\theta=0)$ に質点をのせる (図 2)。質点は物体表面に沿って頂点から時計回りに初速度 0 で滑り始めたのちに物体を離れて、斜面上の点 B で弾んだ。

問3　質点が物体を離れてから点 B に到達するまでの時間を求めよ。

問4　OB の長さを求め R を用いて表せ。

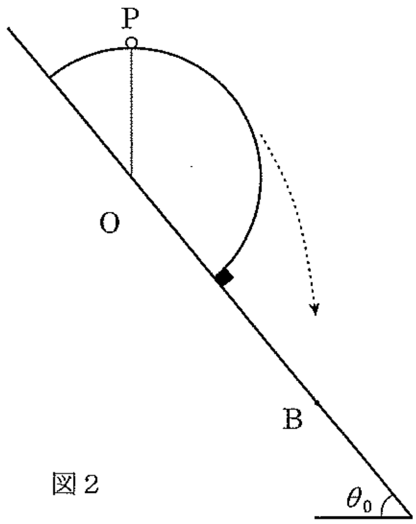


図 2

物　理　（その４）

第３問

[A] 自然長が等しく、バネ定数が各々 k_1、k_2 であるような２個のバネを用意する。

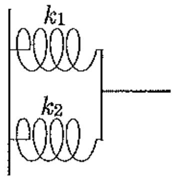


図１a

問１　図１a の様に、バネ定数が k_1、k_2 の２個のバネを並列につなぎ、全体をバネの長さ方向に自然長から x だけ伸ばすとき、必要な力の大きさは k_1、k_2、x を用いて［（ア）］と表される。このことから、２個のバネを並列につないだときの合成バネ定数は k_1、k_2 を用いて［（イ）］と表されることが分かる。

一方、図１b の様に、バネ定数 k_1、k_2 の２個のバネを直列につなぎ、バネの長さ方向に力 F を加えて全体を伸ばすとき、全体の自然な長さからの伸びは k_1、k_2、F を用いて［（ウ）］と表される。このことから、２個のバネを直列につないだときの合成バネ定数は k_1、k_2 を用いて［（エ）］と表されることが分かる。

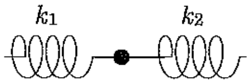


図１b

[B] 一辺の長さが L の正方形をした、質量と厚さを無視できる板を互いに平行に向い合わせて、自然長が a でバネ定数 k のバネを多数使ってつなぐ場合を考える。以下では、バネの長さ方向は常に板面に対して垂直になっているものとする。

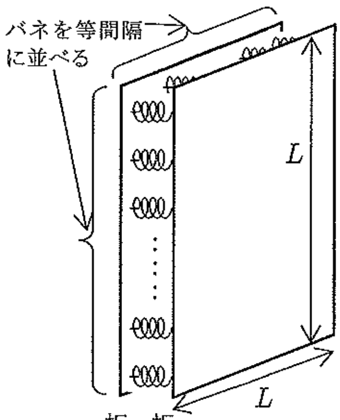


図２

問２　一辺の長さが L の正方形の板面に、縦横等間隔にして N 行 N 列にバネを並べて２枚の板をつなぐ（図２）。これによって、多数のバネが並列につながった状態になる。全体を一つのバネと考えたときの合成バネ定数を k、L、N、a のうち必要な文字を用いて表せ。ただし、すべてのバネはバネの長さ方向に平行にそろっているとする。

問３　問２と同様の板を M+1 枚平行に並べ（図３）、隣り合った板どうしを問２と同様に、等間隔に並べた N 行 N 列のバネでつなぐ。これによって、N 行 N 列のバネが M 個直列につながった状態になる。このとき、全体を一つのバネと考えたときの合成バネ定数を k、L、N、M、a のうち必要な文字を用いて表せ。

問３で作ったもの（図３）全体を一つの直方体をした物体とみなす。全てのバネが自然長のとき、板に垂直な方向の物体の長さ（厚さ）は aM である。

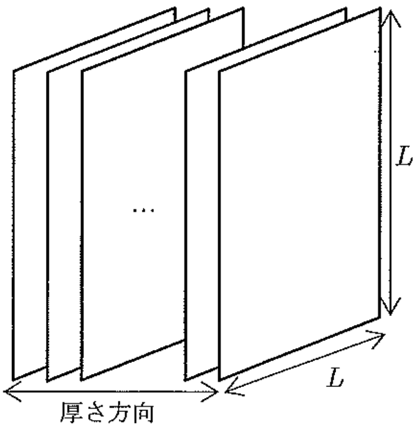


図３　板を M+1 枚平行に重ねてバネでつなぐ。

問４　この物体の単位体積当たりのバネの個数（バネの個数密度）を ρ とする。ρ を L、N、M、a のうち必要な文字を用いて表わせ。

問５　この物体の板に垂直な方向（バネの長さ方向）に力 F を加えて押したところ、物体の厚さが h だけ縮んだ。今、係数 E を次式で定義する。

$$\frac{F}{L^2}=E\frac{h}{aM}$$

このとき、E を ρ、k、a を用いて表せ。

物　理　(その５)

第４問

コンデンサー、電源、スイッチ、およびダイオードで回路を作り、スイッチの切り替えを行う。ここで、ダイオードは図１に示した記号で表され、一方向にのみ電流を通し、逆方向には電流を通さないという性質をもつ。例えば図２の回路において、コンデンサーC_1に蓄えられている電荷がゼロの状態で、スイッチＳをＡ側に入れると、ダイオードに電流が流れる向きに電圧がかかるのでコンデンサーC_1には電流が流れ込む。一方で、スイッチＳをＢ側に入れると、ダイオードに電流が流れない向きに電圧がかかるので、コンデンサーC_1には電流が流れ込まない。

図１　ダイオードの記号。

この記号の左側の電位が高いとき電流が左から右に流れる（導線に沿って三角形の頂点が向いた向きに流れる）。逆に、右側の電位が高いときには電流は流れない。

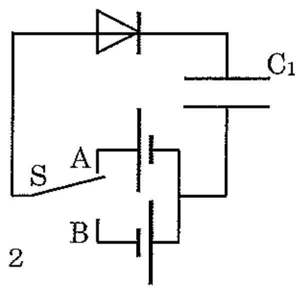


図２

以下の問において、図３の回路を考える。コンデンサーC_1とC_2の電気容量を共にCとし、各々の電源の電圧を共にEとする。はじめ、各コンデンサーには電荷が蓄えられていないとして以下の問に答えよ。

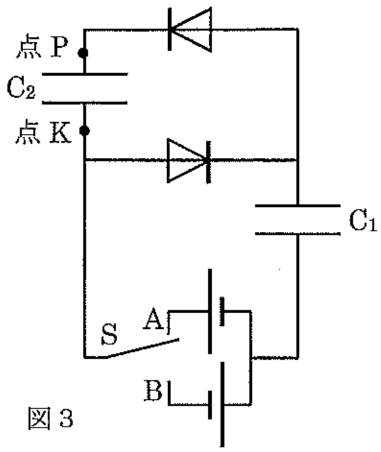


図３

最初にスイッチＳをＡ側に入れて十分に時間が経過した後、

問１　コンデンサーC_1に蓄えられる電荷の大きさはいくらか。

引き続いて、スイッチＳをＢ側に入れて十分に時間が経過した後、

問２　コンデンサーC_1に蓄えられる電荷の大きさはいくらか。
問３　コンデンサーC_2の極板間の電位差はいくらか。
問４　問３において、点Ｐと点Ｋのうち電位が高いのはどちらか。

この後、スイッチＳをＡ側に入れて、十分に時間が経過した後に、スイッチＳをＢ側に切り替え、さらに、十分に時間が経過した後に、再びスイッチＳをＡ側に切り替える、という操作を繰り返すことにする。

以下において、スイッチＳをn回目にＢ側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサーC_2の極板間の電位差をV_nとする。

問５　スイッチＳをn+1回目にＡ側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサーC_1の極板間の電位差はいくらか。

問６　スイッチＳをn+1回目にＢ側に入れて、十分に時間が経過した後のコンデンサーC_2の極板間の電位差をV_{n+1}とするとき、V_{n+1}をV_n、Eを用いて表せ。ただし、点Ｐと点Ｋのうち問４で答えた方の点を電位が高いものとして関係式を導け。