2014年度入学試験問題(前期)

数　　学（問　題）

注　意

1)　数学の問題冊子は4ページあり，問題はⅠ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳの4題である。

2)　別に解答用紙1枚があり，**解答はすべてこの解答用紙の指定欄に記入すること。**
指定欄以外への記入はすべて無効である。
計算や下書きは問題用紙の白紙・空白部分を利用して行うこと。

3)　**解答用紙の所定欄に受験番号を記入せよ。氏名を記入してはならない。**
解答用紙の※印の欄には何も記入してはならない。

4)　問題冊子，解答用紙はともに持ち出してはならない。

5)　途中退場または試験終了時には，解答が他の受験生の目に触れないよう，解答用紙の上に問題冊子を重ねて，監督者の許可を得た後に退出すること。

Ⅰ (1)~(6)の $\boxed{}$ の中に，あてはまる数，角度，整式，不等式，記号，語句などを記入せよ。

(1) 次の式を因数分解せよ。

$x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = \boxed{\text{ア}}$,

$(x + y + z)(xy + yz + zx) - xyz = \boxed{\text{イ}}$

(2) 9人の人を，2人・3人・4人の3つの組に分ける方法は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りあり，2人・2人・2人・3人の4つの組に分ける方法は $\boxed{\text{エ}}$ 通りある。

(3) a は実数として，x の2次関数 $g(x) = x^2 - 2ax + a^2 + a - 3$ を考える。すべての x に対して $g(x) > 0$ が成り立つような a の値の範囲は $\boxed{\text{オ}}$ である。また，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において $g(x) \geqq 0$ が成り立つような a の値の範囲は $\boxed{\text{カ}}$ である。

(4) 次の各命題が，正しければ指定の括弧に○を記入し，正しくなければ×を記入せよ。

鈍角三角形の外心は三角形の外部に存在する⇒ $\boxed{\text{キ}}$

外心と内心とが一致する三角形は正三角形以外にも存在する⇒ $\boxed{\text{ク}}$

有理数と無理数との和は無理数である⇒ $\boxed{\text{ケ}}$

有理数と無理数との積は無理数である⇒ $\boxed{\text{コ}}$

(5) $x > 1$ で定義された関数 $g(x) = \log_3 x + \log_x 81$ は，$x = \boxed{\text{サ}}$ において最小値 $\boxed{\text{シ}}$ をとる。

(6) Oを原点とする座標空間において，定ベクトル $\vec{a}\,(\neq \vec{0})$ に対して，内積 $\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値が1に等しくなるような点P全体がつくる平面を α とする。α 上の任意の2点 $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}$ に対して，$\vec{a} \cdot \overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = \boxed{\text{ス}}$ が成り立つので，Oから α へ下ろした垂線の足をHとすると，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{a}$ を用いて $\boxed{\text{セ}}$ と表される。

II　a，bは$a \neq 1$，$b > 0$を満たす定数，nは自然数を表すものとし，漸化式 $x_{n+1} = ax_n + b$で定められる数列$\{x_n\}$を考える。

(1)　$x_1 = A$のときすべてのnについて$x_n = A$が成り立つような定数Aを求めると，$A = \boxed{\quad ソ \quad}$である。

(2)　$x_1 = 1$とする。(1)で求めた定数Aを用い，

$$y_n = x_n - A \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定められる数列$\{y_n\}$を新たに考えることで，数列$\{x_n\}$の第n項をnの式で表すと，$x_n = \boxed{\quad タ \quad}$となる。

(3)　$z_{n+1} = \dfrac{z_n}{bz_n + \dfrac{1}{2}}$，$z_1 = 1$で定められる数列$\{z_n\}$の第$n$項を$n$の式で表すと，$z_n = \boxed{\quad チ \quad}$となる。そして，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} z_n = \boxed{\quad ツ \quad}$が成り立つ。

Ⅲ　n は 3 以上の整数とする。箱の中に 1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚の札がある。A，B，C の 3 人が，この箱から 1 枚ずつ，同時にかつ無作為に札を取り出し，取り出された 3 枚のうち最大の番号が書かれた札を引いた者を勝者とする。k は $3 \leqq k \leqq n$ を満たす整数として，以下の問いに答えよ。

(1)　事象「A が，番号 k の書かれた札を取り出して，かつ勝者となる」が成り立つような，札の取り出し方は全部で $\boxed{\quad テ \quad}$ 通りあって，この事象が起きる確率は $\boxed{\quad ト \quad}$ である。

(2)　A，B，C の誰かが，番号 k の書かれた札を取り出して，かつ勝者となる確率は $p_k = \boxed{\quad ナ \quad}$ である。

(3)　同時に取り出された 3 枚の札に書かれた番号のうち最大番号の期待値は，(2)の p_k を用いて，$E = \sum_{k=3}^{n} k \times p_k$ で与えられる。E の値を求めると $\boxed{\quad ニ \quad}$ となる。ここで，公式 $\sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ を使ってよい。

Ⅳ　xy 平面上に，円 $C : x^2 + y^2 = 16$ をとる。点 $\mathrm{A}(0,\ -2)$ と，円 C 上の点 $\mathrm{P}(4\cos\theta,\ 4\sin\theta)$ とを両端とする線分 AP の垂直二等分線を ℓ とする。

(1)　ℓ の方程式を書き下すと，$\boxed{\quad ヌ \quad}$ となる。

(2)　実数 x，y を与えたとき，括弧ヌの式を満たす実数 θ が存在しないための必要十分条件を，x，y の式として書き表すと，$\boxed{\quad ネ \quad}$ となる。

(3)　点 P が円 C 上を一周するとき，直線 ℓ が通過しない領域の面積は $\boxed{\quad ノ \quad}$ である。