平成26年度入学試験問題（一般入試）

数　　　学

注　意

1. 問題冊子は6ページ，解答紙は3枚である。問題冊子は，指示があるまで開かないこと。
2. 解答開始前に，試験監督者の指示にしたがって，すべての解答紙それぞれ2ケ所に受験番号を記入すること。
3. 「始め」の合図があったら，問題冊子のページ数を確認すること。
4. 解答は，黒色鉛筆（シャープペンシルも可）を使用し，すべて所定の欄に記入すること。欄外および裏面には記入しないこと。
5. 試験終了後，監督者の指示に従って，解答紙の順番をそろえること。
6. 下書き等は，問題冊子の余白を利用すること。
7. 解答紙は持ち帰らないこと。

1 空欄にあてはまる適切な数，式，記号などを解答用紙の所定の欄に記入しなさい。

(1) 実数 x の関数 $f(x)=|\sin 2x+2\sin x+2\cos x|$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 行列 $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -2\sin\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で $A^5=A^2$ を満たすとき，実数 θ の値は $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{-1}\frac{x^2-1}{x^2+1}\,dx$ の値は $\boxed{\text{ウ}}$ である。

(4) n をある自然数とする。実数 x に対して，方程式 $7\sin^{8n}x+x=0$ の解の個数は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(5) $0<a<\dfrac{1}{4}$ とする。座標平面において，方程式 $-4ax+\sqrt{(x+a)^2+y^2}=\dfrac{1}{4}$ で表される曲線が囲む図形の面積は $\boxed{\text{オ}}$ である。

(6) $x+y+z+w=20$ を満たす正の整数 x，y，z，w の組は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

(7) 7つの実数 $\dfrac{1}{2}$，$\sqrt{\pi}$，$\sqrt{3}$，$\dfrac{\pi^2}{8}$，$\sin\dfrac{\pi}{8}$，$\cos\dfrac{\pi}{8}$，$\tan\dfrac{\pi}{8}$ を小さい方から順に並べたものを $A<B<C<D<E<F<G$ とする。このとき実数 A^2 の値は $\boxed{\text{キ}}$ であり，$E^2-F^2+G^2$ の値は $\boxed{\text{ク}}$ である。

（計算用余白）

$\boxed{2}$ 行列 $A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ について，次の問いに答えなさい。

(1) 自然数 n について，$\begin{pmatrix}p_n\\ q_n\end{pmatrix}=A^n\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{3}\end{pmatrix}$ とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(p_nq_n)$ を求めなさい。

(2) 行列 A で表される1次変換によってそれ自身へ移される直線をすべて求めなさい。

（計算用余白）

3 一辺の長さが1の正二十面体の1つの面を△ABCとする。さらに外接球の中心をOとする。すなわち，この正二十面体の12個の頂点は中心をOとする1つの球の上にある。次の問いに答えなさい。

(1) 3点A，B，Oを通る平面でこの正二十面体を切ったとき，切り口として得られる六角形の面積を求めなさい。

(2) Oから△ABCに下ろした垂線の足をDとするとき，線分ODの長さを求めなさい。

（計算用余白）