医学部　［一般・学士］～第１次試験～　数学

※学士は設問【1】は必須、【2】又は【3】はどちらか選択

試験時間	80分

注意事項　1. 数学(一般)の用紙は３枚である。３枚とも解答すること。
2. ３枚とも受験番号と氏名の記入を忘れないこと。
3. 【２】，【３】は，解答の過程を必ず記すこと。

【1】 つぎの $\boxed{}$ にあてはまる答を下の解答欄に記せ。

(1) 空間に４点 A(5, 1, 3)，B(4, 4, 3)，C(2, 3, 5)，D(4, 1, 3)がある。

(i) $\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$ のなす角を θ とおくとき，$\theta =$ $\boxed{(ア)}$ である。ただし，$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(ii) 四面体 ABCD の体積は $\boxed{(イ)}$ である。

(2) a を実数とする。x についての２次方程式 $x^2 - 2x\log_2\{(a+1)(a-5)\} + 4 = 0$ の解の１つが２であるとき，a の値は $\boxed{(ウ)}$ である。
また，この２次方程式が実数解をもたないような a の値の範囲は $\boxed{(エ)}$ である。

(3) 不等式 $x^2 + 2x \leqq y \leqq 2x + 2 \leqq \frac{4}{3}y$ の表す領域の面積は $\boxed{(オ)}$ である。また，この領域上の点 (x, y) のうち，$5x - 3y$ が最小となるような点の座標は $\boxed{(カ)}$ である。

(4) n は正の整数とする。階段を１度に１段，２段または３段登る。このとき，n 段からなる階段の登り方の総数を a_n とする。例えば，$a_1 = 1$ であり，$a_2 = 2$ である。

(i) a_3 の値は $\boxed{(キ)}$ である。

(ii) a_4 の値は $\boxed{(ク)}$ である。

(iii) a_{10} の値は $\boxed{(ケ)}$ である。

(5) $0 < t < \frac{\pi}{2}$ とする。曲線 $y = \sin x$ 上の点 $P\left(t + \frac{\pi}{2},\ \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ における法線を l とおく。直線 $x = \frac{\pi}{2}$ を m とおき，法線 l と直線 m の交点を Q とする。

(i) $t = \frac{\pi}{3}$ のとき，点 Q の座標は $\boxed{(コ)}$ である。

(ii) 曲線 $y = \sin x$ と法線 l および直線 m で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とするとき，極限 $\lim_{t \to +0} \frac{S(t)}{t}$ の値は $\boxed{(サ)}$ である。

【2】 行列 $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 7 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ に対し，$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$，$A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とおく。以下の問に答えよ。

(1) $b_{n+1} = b_1 a_n + d_1 b_n$，$b_{n+1} = a_1 b_n + b_1 d_n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ が成り立つことを示せ。

(2) A^n $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を求めよ。

答　$A^n = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

(3) 極限 $\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{\sqrt{{p_n}^2 + {q_n}^2}}$ の値を求めよ。

【3】 a は $0 < a < e$ を満たす定数とする。曲線 $y = \log x$ 上の点 $A(a, \log a)$ における接線を l，法線を m とおく。以下の問に答えよ。必要ならば $e = \lim_{k \to 0}(1 + k)^{\frac{1}{k}}$ で，$2.718 < e < 2.719$ であることを用いてよい。

(1) 接線 l の方程式を a を用いて表せ。

答　$y =$

(2) 接線 l が x 軸と交わる点を P，y 軸と交わる点を Q とし，原点を O とする。三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とおくとき，$S(a)$ を a を用いて表せ。

(3) a が $0 < a < e$ の範囲を動くとき，(2) の $S(a)$ を最大にする a の値と $S(a)$ の最大値を求めよ。

答　a の値：　　，$S(a)$ の最大値：

(4) a が $0 < a < e$ の範囲を動くとき，法線 m が点 $(e, 0)$ を通るような a の値の個数はただ１個であることを示せ。